$\boxed{1.2.1}$

b)

$\boxed{1.2.2}$

a) b)

preuve par réc.

① $\boxed{n=1}$

hyp. de réc.

② $\boxed{n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark}$

$\boxed{1.2.1}$ Prop. $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\qquad\qquad}^{n} & \\ 1 & \cdots & n \\ n & \cdots & 1 \\ \hline n+1 & & n+1 \end{array}$$

preuve par réc. sur n :

$\boxed{n=1}$ $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark}$ hyp. de réc. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\overset{?}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n+1} i \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

A utiliser

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \underset{\text{hyp. de réc.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+2)}{2} \checkmark$$

CQFD

$\boxed{1.2.1 \quad b)}$

Prop. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

preuve par réc. sur n:

$\boxed{n=1}$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

$$1 = \frac{2\cdot 3}{6} \checkmark$$

implique

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$ $\boxed{\text{hyp. de réc.}}$ $\displaystyle\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$

$$\overset{\text{hyp. de réc.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$(n+1)(n+1)$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \quad \checkmark$$

CQFD