$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n} \end{cases}$$

a) $x_n > 0$, par réc. sur n

$\boxed{n=0}$ $x_0 = 1 > 0$ ✓

$\boxed{n ✓ \Rightarrow n+1 ✓}$ hyp. de réc. $x_n > 0$

$$x_n > 0$$

$$\Rightarrow 1 + x_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x_n} > 0$$

CQFD

b) Ce n'est pas le cas : $x_0 = 1$ / $x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{2}{3}$ / $x_3 = \frac{3}{5}$ / $x_4 = \frac{5}{8}$ / $x_5 = \frac{8}{13}$

$\Longrightarrow \quad x_0 > x_1$ mais $x_1 < x_2$. (Voir la fin du document pour une démo. de la convergence de x_n)

c) $x = \dfrac{1}{1+x} \iff x + x^2 = 1$

$\iff x^2 + x - 1 = 0$

$\iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vu que $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, on ne peut garder que $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}618$ comme limite.

Montrons que $\frac{1}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \qquad n^2+1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n^2+1 \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \qquad \text{si } \varepsilon < 1$$

On pose $N_\varepsilon = E\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\right) + 1$ et on a : $n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon < 1$. Si $\varepsilon > 1$, $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{3 x_n} \end{cases}$$

a) $\boxed{n=0}$ $\quad x_0 = 1 < 3$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$ hyp. de réc. $x_n < 3$

$$x_n < 3$$

$$\Rightarrow 3x_n < 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x_n} < \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow x_{n+1} < 3$$

CQFD.

b) $\boxed{n=0}$ $\quad x_0 = 1 < x_1 = \sqrt{3 \cdot 1} \simeq 1{,}73$ ✓

$\boxed{n\ \checkmark \Rightarrow n+1\ \checkmark}$ hyp. de réc. $x_n < x_{n+1}$

$x_n < x_{n+1}$

$\Rightarrow 3x_n < 3x_{n+1}$

$\Rightarrow \sqrt{3x_n} < \sqrt{3x_{n+1}}$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$ CQFD

c) $x = \sqrt{3x}$

$x^2 = 3x$ $x=0$ ou $x=3$

On retient $x=3$

$$\boxed{\frac{2n^2}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 2}$$

Fie $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{2n^2}{n^2+1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 2}{n^2+1} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-2}{n^2+1} \right| < \varepsilon$$

$n^2+1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

vrai să $\varepsilon > 2$

$$\Leftrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

$\varepsilon \leq 2$

Si l'on pose $N_\varepsilon = E\left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}\right) + 1$,

on a $|x_n - 2| < \varepsilon$ sitôt que $n \geq N_\varepsilon$.

La suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n} \end{cases}$$

converge vers $\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}618$,

la solution positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{1+x}$$

En effet, on peut écrire

$$|x_n - \varphi| = \left| \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+\varphi} \right|$$

$$= \left| \frac{1+\varphi - (1+x_{n-1})}{(1+x_{n-1})(1+\varphi)} \right| = \left| \frac{\varphi - x_{n-1}}{(1+\varphi)(1+x_{n-1})} \right|$$

$$= \left| \frac{x_{n-1} - \varphi}{1+\varphi} \right| \cdot \frac{1}{1+x_{n-1}}$$

car $|a-b| = |b-a| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

et on a démontré à la question a) que $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On peut donc écrire :

$$|x_n - \varphi| = |x_{n-1} - \varphi| \cdot \frac{1}{1+\varphi} \cdot \frac{1}{1+x_{n-1}}$$

> 1 car $x_{n-1} > 0$

$$\Rightarrow |x_n - \varphi| < |x_{n-1} - \varphi| \cdot \frac{1}{1+\varphi}$$

On a donc, par récurrence sur n :

$$|x_n - \varphi| < \frac{1}{(1+\varphi)^n}$$

En effet, si $n = 0$, on a $|x_0 - \varphi| < 1$

Car $\left|1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1=\frac{1}{(1+\varphi)^0}$

De plus, si l'on suppose que

$$|x_{n-1}-\varphi|<\frac{1}{(1+\varphi)^{n-1}}$$

le travail fait plus haut montre que

$$|x_n-\varphi|<|x_{n-1}-\varphi|\cdot\frac{1}{1+\varphi}$$

hyp. de réc.

$$<\frac{1}{(1+\varphi)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\varphi}$$

$$=\frac{1}{(1+\varphi)^n}=\left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^n$$

Vu que $\frac{1}{1+\varphi}<1$, $\left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^n<\varepsilon$ sitôt que n est assez grand.