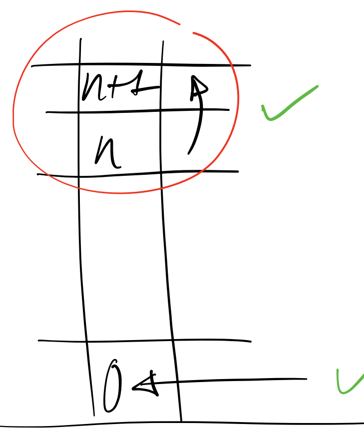
$u_0 = 1$

$u_1 = \sqrt{2}$

$$\boxed{u_{n+1} = \sqrt{2\, u_n}}$$

Récurrence



Suites

2.5.1 – 2.5.9

2.5.11

Fonctions (limites)

$$\boxed{u_n \text{ croissante}}$$

$$\boxed{u_0 < u_1 \quad \text{car} \quad 1 < 1{,}4 < \sqrt{2}}$$

$n = 0$ ✓

$$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$$

✓

$u_n < u_{n+1}$

$2u_n < 2u_{n+1}$

$\sqrt{2u_n} < \sqrt{2u_{n+1}}$

$u_{n+1} < u_{n+2}$

$u_{10^6} = \sqrt{2 \cdot u_{999999}}$

$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

$$\boxed{x = \sqrt{2 \cdot x}}$$

$u_{n+1} \approx u_n$

Définition : Soit u_n, $n \geq 0$ tq.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 u_n} \end{cases} \qquad u_1 = \sqrt{2}$$

$u_0 = 1$ / $u_1 = \sqrt{2 \cdot u_0} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$ / $u_2 = \sqrt{2 u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$

a) Par réc, montrer que $\boxed{u_n \leq 2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

majorée

b) A' utiliser:

• Thm: Une suite croissante et majorée converge.

• Calcul de la limite:

$$u_{n+1} = \sqrt{2 u_n}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$x = \sqrt{2 x}$$

$x^2 = 2x$ $\qquad x \geq 0$

$x - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$ $\qquad x = 2$ / $\cancel{x = 0}$ $\implies$ $\lim u_n = 2$

2.5.8

a) $\boxed{\begin{array}{l} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 u_n} \end{array}}$ Suite définie par réc.

Pour tout

Résultat: $\boxed{u_n < 2}$ $\forall\, n \geq 1$

preuve: par réc. sur n

$\boxed{n=1}$ $u_1 = \sqrt{2} < 2$ ✓

$\boxed{n ✓ \Rightarrow n+1 ✓}$ hyp. de réc. $\boxed{u_n < 2}$

$u_n < 2$

$\cdot 2$ (mult. par un nbre > 0)

$2 u_n < 2 \cdot 2$

$\sqrt{}$ (conserve les inégalités)

$\sqrt{2 u_n} < \sqrt{4}$

$u_{n+1} < 2$

Si $u_n < 2$, alors $u_{n+1} < 2$

CQFD

Résultat: $u_n < u_{n+1} \quad \forall n \geq 1$

preuve par réc. sur n :

$\boxed{n = 1}$ ✓ $u_1 = \sqrt{2}$ $\quad u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} \simeq \sqrt{2{,}82}$

$2 < 2{,}82 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2{,}82} \Rightarrow u_1 < u_2$

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$ hyp. de réc. $u_n < u_{n+1}$

$u_n < u_{n+1}$

$2u_n < 2u_{n+1}$

$\sqrt{2u_n} < \sqrt{2u_{n+1}}$

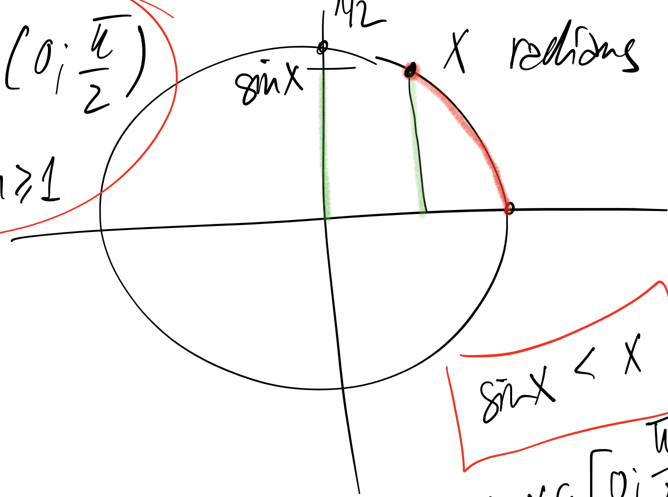
$u_{n+1} < u_{n+2}$

CQFD

$$-n \le n \sin\frac{1}{n^2} \le n$$

$$-\infty \qquad\qquad +\infty$$

$\frac{1}{n^2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ si $n \geq 1$



$\boxed{\sin x < x}$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) < n \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{3^n - 3^{n-1}}{2 + 3^n} = \frac{1 - \frac{3^{n-1}}{3^n}}{\frac{2}{3^n} + 1}$$

$$\frac{2^n}{2^m} = 2^{n-m}$$

$$\frac{1\,\cancel{3^{n-1}}}{3 \cdot \cancel{3^{n-1}}}$$

$$= \frac{1 - 3^{n-1-n}}{\frac{2}{3^n} + 1}$$

$$3^n = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots}_{n \text{ fois}}$$

$$= 3 \cdot 3^{n-1}$$

$$= \frac{1 - 1/3}{\frac{2}{3^n} + 1} = \frac{2/3}{\frac{2}{3^n} + 1}$$

$$\frac{2}{3^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$$

$\underline{\text{Déf:}}$ $u_1 = 2$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \Rightarrow u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + 1}$$

$u_{(n+1)+1}$

$\underline{\text{Rés:}}$ $u_{n+1} < u_n \quad \forall\, n \geq 1$

<u>preuve par réc. sur n:</u>

$\boxed{n=1}$ ✓ $u_2 = \dfrac{u_1}{u_1+1} = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3} < 2 = u_1$

$\boxed{n ✓ \Rightarrow n+1 ✓}$ hyp. de réc: $u_{n+1} < u_n$

$u_{n+1} < u_n$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

$$u_{\boxed{(n+1)+1}} = \frac{u_{\boxed{n+1}}}{u_{\boxed{n+1}} + 1}$$

$u_{n+2} < u_{n+1}$

$$\sqrt{n^2-n} - n \cdot 1 =$$

$$\frac{\sqrt{n^2-n} - n}{1} \cdot \frac{\sqrt{n^2-n} + n}{\sqrt{n^2-n} + n} =$$

$$\frac{(n^2-n) - n^2}{\sqrt{n^2-n} + n} = \frac{n^2 - n - n^2}{\sqrt{n^2-n} + n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2-n} + n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}(n^2-n)} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1}$$

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad n \to \infty \qquad \to \frac{1}{2}$$