a) On sait que si $m \mid r$, alors $m \mid -r$.
(4.2.1 c)

On sait également que si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (b+c)$. (4.2.1 d)

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$m \mid n \text{ et } m \mid r \Rightarrow m \mid (n+(-r))$$

$$\Rightarrow m \mid (n-r)$$

b) Si $m \mid n$, $\exists z \in \mathbb{Z}$ tq. $m \cdot z = n$

Ainsi, $r \cdot (m \cdot z) = r \cdot n$

$$\Leftrightarrow m(r \cdot z) = r \cdot n$$

Et donc $m \mid r \cdot n$, vu que $r \cdot z \in \mathbb{Z}$

c) Soit $r \neq 0$. Si $m \mid n$, $\exists\, z \in \mathbb{Z}$ tq. $m \cdot z = n$.

On peut écrire $r \cdot (m \cdot z) = r \cdot n \Leftrightarrow (r \cdot m) \cdot z = r \cdot n$.

Ce qui fait que $(r \cdot m) \mid (r \cdot n)$, vu que $z \in \mathbb{Z}$.

On a démontré la première implication.

Supposons maintenant que $rm \mid rn$. Il existe $w \in \mathbb{Z}$ tq. $(r \cdot m) \cdot w = r \cdot n \Leftrightarrow r(m \cdot w) = r \cdot n$

Vu que $r \neq 0$, on peut simplifier : $mw = n$

En fin de compte, $m \mid n$, ce qui démontre l'autre implication.