1. $x+(y+z) = (x+y)+z$

2. $x+y = y+x$

3. Il existe 0 tel que $x+0 = x$ pour tout x.

4. Pour tout x, il existe y tel que $x+y = 0$. On dit que y est l'opposé de x.

<u>Proposition 1</u> : L'élément neutre est unique.

Autrement dit, si e est tel que $x+e = x$ pour tout x, alors $e = 0$.

<u>preuve</u>: Soit e tel que

$$x+e = x \qquad (*)$$

pour tout x.

On peut écrire :

$$e \underset{3}{=} e+0 \underset{2}{=} 0+e \underset{*}{=} 0$$

CQFD

<u>Proposition 2</u> : L'opposé d'un nombre est unique.

<u>preuve</u> : Soit x. On sait qu'il existe y tel que $x+y=0$. $\quad (4)$

Supposons qu'il existe z tel que

$$x+z=0 \qquad (*)$$

On peut écrire

$$z \underset{3}{=} z+0 \overset{4}{=} z+(x+y) \overset{1}{=} (z+x)+y$$

$$\underset{2}{=} (x+z)+y \underset{*}{=} 0+y \underset{2}{=} y+0 \underset{3}{=} y$$

CQFD

<u>Notation:</u> Soit x et y l'opposé de x. On note $y = -x$.

<u>Corollaire:</u> Soit x. On a $-(-x) = x$.

<u>preuve:</u> Vu que $x + (-x) = 0$, on a aussi $(-x) + x = 0$. On peut donc dire que x est l'opposé de $(-x)$. On a bien

$$-(-x) = x.$$

CQFD

<u>Notation:</u> Pour x et y on note

$$x - y = x + (-y)$$

<u>Proposition</u> 3: L'élément neutre, 0 autrement dit, est le seul élément idempotent; le seul à avoir la propriété $0 + 0 = 0$.

preuve: Soit e tel que $e+e=e$ (*)

On peut écrire

$$e \overset{3}{=} e+0 \overset{4}{=} e+(e+(-e))$$
$$\overset{1}{=} (e+e)+(-e)$$
$$\overset{*}{=} e+(-e) \overset{4}{=} 0$$

Il faut donc que $e=0$ CQFD

5. $x(yz)=(xy)z$

6. $xy=yx$

7. Il existe $1\neq 0$ tel que $1\cdot x = x$ pour tout x.

8. Pour tout $x\neq 0$, il existe y tel que $xy=1$.

9. $x(y+z)=xy+xz$

Proposition 4: Pour tout x, $0 \cdot X = 0$

preuve: $$0 \cdot X \underset{3}{=} (0+0) \cdot X \overset{9}{=} 0 \cdot X + 0 \cdot X$$

Et donc, $0 \cdot X = 0 \cdot X + 0 \cdot X$, ce qui fait que $0 \cdot X$ est idempotent.
D'après la proposition 3, 0 est le seul élément idempotent.
On a bien $0 \cdot X = 0$ CQFD

Proposition 5: $(-1) \cdot (-1) = 1$

preuve: $$\begin{aligned} 0 &\overset{P4}{=} 0 \cdot (-1) \overset{6}{=} (-1) \cdot 0 \\ &\overset{4}{=} (-1)\left(1 + (-1)\right) \\ &\overset{9}{=} (-1) \cdot 1 + (-1)(-1) \\ &\overset{6}{=} 1 \cdot (-1) + (-1)(-1) \end{aligned}$$

$$\overset{7}{=} (-1) + (-1)\cdot(-1)$$

En fin de compte, on a :

$$(-1) + (-1)\cdot(-1) = 0$$

L'opposé de (-1) est donc $(-1)\cdot(-1)$. (P2)

On sait déjà que l'opposé de (-1) est

$-(-1) = 1$. (Corollaire)

La conclusion suit : $(-1)\cdot(-1) = 1$

CQFD.