$$\boxed{ax^3+bx^2+cx+d=0} \qquad a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

$$a\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x^3+3x^2\frac{b}{3a}+3x\frac{b^2}{9a^2}+\frac{b^3}{27a^3}}-3x\frac{b^2}{9a^2}-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

$(A+B)^3$ avec $A=x$ et $B=\frac{b}{3a}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^3}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}x+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}\left(x+\frac{b}{3a}\right)-\frac{3ac-b^2}{3a^2}\cdot\frac{b}{3a}+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}=0$$

On pose $z=x+\frac{b}{3a}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z^3+p\cdot z+q=0}$$

Avec $p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$

et $q = \dfrac{27a^2d - b^3}{27a^3} - \dfrac{3abc - b^3}{9a^3}$

$$= \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}$$

$$= \frac{d}{a} - \frac{b}{27a}\left(\frac{9ac - 2b^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{d}{a} - \frac{b}{27a}\left(\frac{9c}{a} - \frac{2b^2}{a^2}\right)$$

Méthode de Cardan

On pose $z = u + v$ dans

$$z^3 + pz + q = 0$$