→ Mardi 8 novembre

Factoriser

$$\boxed{x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 65x^2 + 36x - 180}$$

Soit u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On peut écrire

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a

il existe   tel que

$$\boxed{\boxed{\exists k \in \mathbb{R} \mid u = k \cdot v} \Leftrightarrow \boxed{ad - bc = 0}}$$

Il faut démontrer que les deux conditions encadrées en rouge sont équivalentes

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $u = k \cdot v$. On a

alors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kc \\ kd \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = kc \\ b = kd \end{cases}$ Ainsi, $ad - bc = kcd - kdc$

$$= kcd - kcd = 0$$

La première implication étant démontrée, on passe à la seconde.

Notons au passage que si $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou que $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a alors $u = 0 \cdot v$ ou $v = 0 \cdot u$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $ad - bc = 0$.

$\Leftrightarrow ad = bc$

$\boxed{1^{er} \text{ cas}}$ $d = 0 \Rightarrow a \cdot d = a \cdot 0 = 0 \overset{\text{hyp.}}{=} bc$

$\Rightarrow bc = 0$ ce qui fait que $b = 0$ ou $c = 0$

i) Si $b = 0$, $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$

On a donc $u = \frac{a}{c} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot v$

si $c \neq 0$. (Si $c = 0$, $v = 0 \cdot u$, les vecteurs sont liés.)

ii) Si $b \neq 0$, alors $c = 0$, donc $v = 0 = 0 \cdot u$, et les vecteurs sont liés.

$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas}}$ $d \neq 0$

$$ad = bc \iff a = \frac{bc}{d} = \frac{b}{d} \cdot c$$

Ainsi,

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{d} \cdot c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{d} \cdot c \\ \frac{b}{d} \cdot d \end{pmatrix}$$

$$= \frac{b}{d} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = k \cdot v$$

CQFD

<u>Not.</u> Si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on peut calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ comme suit :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Coplanarité:

Soit $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Les vecteurs sont libres ssi

$$x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$$

On peut également faire un test en deux temps:

1) Si $u = k \cdot v$, i.e. u et v sont colinéaires, les trois vecteurs sont coplanaires.

2) Sinon, les trois vecteurs sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R} \;/\; x \cdot u + y \cdot v = w$$

Critère d'indépendance linéaire dans $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

u, v, w est libre

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2 (v_1 w_3 - v_3 w_1)$$
$$+ u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) \neq 0$$

C'est le critère du <u>déterminant</u>.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1-2) - 2(0-6) + (-1)(0-3) = -3 + 12 + 3 = 12 \neq 0$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est libre}}$$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 0y = 3 \\ 2x + y = 1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ 6 + y = 1 \\ -3 + 2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 3 \\ \boxed{\begin{matrix} y = -5 \\ y = 1 \end{matrix}} \end{matrix} \quad \lightning$$

$w \notin$ plan engendré par u et v

1.3.2

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} m & 3 \\ m+4 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) - (m+4)3 = 0$$

$$= m^2 - m - 3m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-6)(m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 6 \text{ ou } m = -2$$

Les vecteurs sont linéairement dépendants ssi $m = 6$ ou $m = 2$.