a) $a \mid a$ car $a = a \cdot 1$ et $1 \in \mathbb{Z}$

$1 \mid a$ car $a = 1 \cdot a$ et $a \in \mathbb{Z}$

$a \mid 0$ car $0 = a \cdot 0$ et $0 \in \mathbb{Z}$

b) Si $0 \mid a$, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq. $a = 0 \cdot k = 0$.

Donc $a = 0$, obligatoirement.

Si $a = 0$, $a = 0 \cdot k \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \mid a$.

L'équivalence est démontrée.

c) $a \mid b \Rightarrow b = a \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow b = (-a) \cdot (-k)$ et $(-k) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -a \mid b$.

$$-a/b \Rightarrow b = (-a)\cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow b = a\cdot(-k), \quad (-k) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a/b.$$

La première équivalence est démontrée.

$$a/b \Rightarrow b = a\cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -b = -(a\cdot k)$$

$$\Leftrightarrow -b = a\cdot(-k) \text{ et } (-k) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a/-b$$

$$a/-b \Rightarrow -b = a\cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow b = -(a\cdot k)$$

$$\Leftrightarrow b = a\cdot(-k) \text{ et } (-k) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a/b$$

La $2^{\text{ème}}$ équivalence est prouvée.

d) Si $a | b$, alors $b = a \cdot k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si $a | c$, alors $c = a \cdot l$ avec $l \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b + c = a \cdot k + a \cdot l$

$\Leftrightarrow b + c = a(k + l)$

$\Rightarrow b + c = a \cdot m$, avec $m = k + l \in \mathbb{Z}$

e) Si a / b, alors $b = a \cdot k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si b / c, alors $c = b \cdot l$ avec $l \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow c = (a \cdot k) \cdot l$

$\Leftrightarrow c = a \cdot (k \cdot l)$

$\Rightarrow c = a \cdot m$, avec $m = k \cdot l \in \mathbb{Z}$