$$\left(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}\right) \Rightarrow \left(\frac{x+1}{x+2} \neq 1\right)$$

preuve par l'absurde.

Supposons que $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$

$\Leftrightarrow \quad x+1 = 1\cdot(x+2)$ car $x \neq -2$

$\Leftrightarrow \quad x+1 = x+2$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 1$ Contradiction

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ n > 3) \Rightarrow (n^2 - n - 6 \text{ est pair})$$

preuve: $\underbrace{n(n-1)}_{\text{pair}} - \underset{\uparrow\ \text{pair}}{6}$

car n ou $n-1$ est pair CQFD

preuve: par réc. sur n

si $n = 4$ $16 - 4 - 6 = 6$ est pair

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark}$ Hyp. de réc $n^2 - n - 6$ est pair

$$(n+1)^2 - (n+1) - 6 = n^2 + 2n + \cancel{1} - n - \cancel{1} - 6$$

$$= n^2 + n - 6$$

$$= \underbrace{n^2 - n - 6}_{\text{pair}} + \underset{\text{pair}}{2n}$$

CQFD

preuve: $n^2 - n - 6 = \underbrace{(n-3)(n+2)}$

L'un des deux est forcément pair

CQFD

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}\right) \Rightarrow \left(\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}\right)$$

par l'absurde :

$$\sqrt{n^2+1} = k \underbrace{\in \mathbb{N}}_{\text{un nombre entier}}$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2+1 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = k^2 - n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (k-n)(k+n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(k-n)}_{\text{entier}} \mid 1 \quad \text{et} \quad \underbrace{(k+n)}_{\text{entier}} \mid 1$$

$$\Rightarrow k-n = \pm 1 \qquad k+n = \pm 1$$

$$n = k \pm 1 \qquad n = -k \pm 1$$

$$n = \pm k \pm 1$$

$$n^2+1 = k^2$$

$$(k+1)^2+1 = k^2 \Rightarrow \cancel{k^2}+2k+1+1 = \cancel{k^2} \qquad k=-1$$

$$(k-1)^2+1 = k^2 \Rightarrow k^2-2k+1+1 = k^2 \qquad k=1$$

$$\Rightarrow n^2=0 \Rightarrow n=0 \quad \lightning$$