Méthodes numériques : polynômes

Exercice 1 (0 points)

On donne le code ci-dessous :

```
p=[1,2,3,4,5,6]
q=p[2:5]
r=q[::-1]
s=p[-1]
t=p[1:]
print(q)
print(r)
print(s)
print(t)
```

0 1 2 3 4 5

[1, 2, 3, 4, 5, 6]

$\boxed{2\ 3\ 4}$ 5   p[2,5]

a) Quelles sont les listes affichées à la console après exécution de ce code ?

b) Donner une explication, basées sur les propriétés de l'opérateur de « slicing » de python. Consulter à cet effet la documentation de Python sur les listes.

a) p[2:5] ← [3,4,5]

q[::-1] ← [6,5,4,3,2,1]

p[-1] ← 6

p[1:] ← [2,3,4,5,6]

b) p[: :]   pas (positif/négatif)

début, compris   fin, non compris

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

1 2 3 4 5 6 [1, 2, 3, 4, 5, 6]

Exercice 2 (0 points)

On donne le code ci-dessous :

```
def mult_par_nbre(k, p):
    r = p[:]
    i = 0
    while i < len(p):
        r[i] = k*r[i]
        i += 1
    return r

def somme(p, q):
S1  if len(p) > len(q):
S2      p, q = q, p
S3  s = q[:]
S4  i = 0
S5  while i < len(p):
S6      s[i] += p[i]
S7      i += 1
S8  return s

def difference(p, q):
    return somme(p, mult_par_nbre(-1, q))
```

⇒ La commutativité de l'addition usuelle permet de conclure.

a) Démontrer que la somme de deux polynômes définie ci-dessus est commutative.

b) On donne p et q deux listes quelconques.

```
r = difference(p, q)
t = difference(q, p)
n = max(len(p), len(q))
egalite = True
i = 0
while i < n:
    if not r[i] == -1 * t[i]:
        egalite == False
    i = i + 1
```

Quelle est la valeur de la variable **egalite** à la fin de l'exécution de ce code ?

c) Quelle est la propriété mathématique correspondante ?

b) egalite ← True

c) $\underbrace{p-q}_{r} = -\underbrace{(q-p)}_{t}$

a) Soit a, b deux listes. Si len(a) ≠ len(b), on peut supposer que len(a) > len(b). Vu les lignes S1 et S2, somme(a,b) et somme(b,a) font exécuter le même code à partir de la ligne S3 (somme(a,b) « permute a et b »).
Si len(a) = len(b) on a :

① Exécution de somme(a,b) :
ligne S6 : s[i] (= b[i]) ← b[i] + a[i]

② Exécution de somme(b,a) :
s[i] (= a[i]) ← a[i] + b[i]

Exercice 3 (0 points)

On considère la fonction définie ci-dessous :

```
def horner(p, a):
    q = p[:]
    i = (len(p) - 1) - 1
    while i >= 0:
        q[i] += q[i + 1]*a
        i = i - 1
    return q[1:], q[0]
```

En utilisant cette fonction, factoriser complètement le polynôme donné par

$$P(x) = x^9 + 11x^8 + 37x^7 - 11x^6 - 358x^5 - 848x^4 - 608x^3 + 464x^2 + 928x + 384$$

On pourra utiliser une boucle qui calcule la valeur du polynôme en a pour tout entier a compris entre 0 et 384, sachant que a est un diviseur de 384 ssi le reste de la division de 384 par a est 0. On rappelle que l'opérateur de Python qui permet de calculer le reste est l'opérateur %.

Écrire ci-dessous le code Python qui permet de trouver tous les zéros entiers du polynôme en utilisant la fonction horner.

p = [384, 928, 464, -608, -848, -358, -11, 37, 11, 1]

a varie entre -384 et 384

$P(a)$ = horner(p, a)[1] $= 0 \Leftrightarrow (x-a) \mid P(x)$

⚠ Si $P(a) = 0$, remplacer P par Q, le quotient et tester à nouveau avec a.

```
a = -384
while a ≤ 384 :
    | si P(a) = 0
        | diviser  ←  ajouter a à la liste
        while Q(a) = 0
            | diviser  ←  ajouter a à la liste
    a = a+1
```

Exercice 4 (0 points) $p \cdot q$: $\cancel{1}+\cancel{x^2}+\cancel{x^5}+2x+\cancel{2x^3}+2x^6-\cancel{3x^2}-\cancel{3x^4}-3x^7=$

On donne les polynômes $1+2x-2x^2+2x^3-3x^4+x^5+2x^6-3x^7$

$$p(x) = 1 + 2x - 3x^2 \qquad \text{et} \qquad q(x) = 1 + x^2 + x^5$$

et on désigne par d l'opérateur de dérivation sur les polynômes.

a) Calculer les polynômes dq, dp et $dq \cdot p + dp \cdot q$.

b) Calculer le polynôme $d(q \cdot p)$. $q \cdot dp$ $\quad d(qp) = dqp + qdp$

c) Ecrire un programme en Python qui permet de « vérifier expérimentalement » le résultat observé ci-dessus.

a) $dq = 2x + 5x^4$

$dp = 2 - 6x$

$dq \cdot p = (2x+5x^4)(1+2x-3x^2) = 2x + 4x^2 - 6x^3 + 5x^4 + 10x^5 - 15x^6$

$= \cancel{2x}+\cancel{4x^2}-\cancel{6x^3}+\cancel{5x^4}+\cancel{10x^5}-15x^6$

$dp \cdot q = (2-6x)(1+x^2+x^5) = 2+2x^2+2x^5-6x-6x^3-6x^6$

$= \cancel{2}-\cancel{6x}+\cancel{2x^2}-\cancel{6x^3}+\cancel{2x^5}-6x^6$

$dq \cdot p + dp \cdot q = 2 - 4x + 6x^2 - 12x^3 + 5x^4 + 12x^5 - 21x^6$

$d(p \cdot q) = 2 - 4x + 6x^2 - 12x^3 + 5x^4 + 12x^5 - 21x^6$

On voit sur cet exemple que $d(qp) = dqp + qdp$