$3 \mid n^3 - n$

$8 \mid 3^{2n} - 1$

Récurrence

$2^n \geq 1+n$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

$1+2+3+4 = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10$

$1+2+3+4+\ldots+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$

$\boxed{31\ 536\ 000\ 000}$

$P(n) \quad n \in \mathbb{N}$

RÉCURRENCE

$$\boxed{\begin{array}{l} P(0) \checkmark \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \checkmark \end{array}} \Rightarrow P(n) \checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

RÉCURRENCE FORTE

$$\boxed{\begin{array}{l} P(0) \checkmark \\ P(k) \checkmark \ \forall\ 0 \leq k < n \Rightarrow P(n) \checkmark \end{array}} \Rightarrow P(n) \checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

CRYPTO

THÉORIE DES NOMBRES

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots\}$

Nombres premiers

p est premier s'il a exactement 2 diviseurs. (1 et p)

12 est premier ?

$3 \cdot 4$

33 premier ?

$3 \cdot 11$

211 est premier ?

$n = a \cdot b$ $a \geq 2$ $b \geq 2$ n est composé.

Liste des 10 premiers nombres premiers

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Factoriser

ÉRATOSTHÈNE CRIBLE

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17

Liste des nombres premiers inférieurs à 100

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

$\boxed{25 \text{ premiers } \leq 100}$

$n = a \cdot b \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a \leq \sqrt{n} \\ b \leq \sqrt{n} \end{array}}$

n composé

$\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$

$x > \sqrt{n} \quad y > \sqrt{n}$

$x \cdot y > n$

211 est premier ? ✓

À tester : $\underbrace{\cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{11}, \cancel{13}}_{p \text{ tq. } p \leq \sqrt{211}}$

3.1.1

3.1.2 abde

3.1.3
3.1.4 } Récurrence

3.2.8 à 3.2.13

Affirmation : $n^3 - n$ est un multiple de 3 $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(n)$

$n = 5 \qquad n^3 = 125$

$n^3 - n = 120 = 3 \cdot 40$ ✓

$n = 0 \qquad 0^3 - 0 = 0 \qquad 0 = 3 \cdot 0$ ✓

Preuve par $\boxed{\text{récurrence sur } n}$:

– $P(0)$ est <u>vraie</u> car $0^3 - 0 = 0$ et $0 = 3 \cdot 0$

ancrage

– Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie aussi.

On <u>suppose</u> que $\boxed{n^3 - n = k \cdot 3}$ $k \in \mathbb{N}$

hypothèse de récurrence

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

$$= \boxed{n^3 - n} + 3n^2 + 3n$$

$$\overset{\text{hyp. de réc.}}{=} k \cdot 3 + 3n^2 + 3n = 3(k + n^2 + n)$$

$$= 3m$$

$\Rightarrow$ Si $n^3 - n$ est mult. de 3

alors $(n+1)^3 - (n+1)$ aussi !

$\Rightarrow$ $P(n)$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

CQFD

31 536 000 000

31 536 000 001

$n \to n+1$

$0 \to 1$

Principe de récurrence.

$$n^3 - n = n(n^2-1)$$

$$= (n-1)\,n\,(n+1)$$

$n-1$, n, $n+1$ sont 3 nbres consécutifs

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

<u>Affirmation</u> : $\boxed{1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ $\forall n \geq 1$

<u>preuve</u> : Par récurrence sur $n \geq 1$

$\boxed{P(1) \text{ est vraie ?}}$ ancrage de la réc.

$$1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \checkmark$$

$\boxed{P(2) \text{ est vraie ?}}$

$$1+2 = \frac{2\cdot(2+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = \frac{2\cdot 3}{2} = 3 \checkmark$$

$$\boxed{\underbrace{P(n) \checkmark}_{\text{hypothèse de réc.}} \Rightarrow P(n+1) \checkmark}$$

$P(n+1)$: $1+2+3+\dots+(n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Supposons que $P(n)$ est vraie. $\left(1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \right)$

On a $\boxed{1+2+\dots+n} + n+1 \stackrel{\text{hyp de réc}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{1}$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \checkmark$$

$\Rightarrow$ $P(n+1)$ est vraie

$\Rightarrow$ Le résultat est démontré.

CQFD

Exercice Démontrer la formule de la 2ème ligne de la p. 15 du formulaire CRM. (Somme des n premiers carrés) $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$