

$$3 \mid n^3 - n$$

$$8 \mid 3^{2n} - 1$$

Recurrence

$$2^n \geq 1+n$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

$$1+2+3+4 = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

$$1+2+3+4+\dots+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

31 536 000 000

$$P(n) \quad n \in \mathbb{N}$$

---

RÉCURRENCE

$$\begin{array}{l} P(0) \checkmark \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \checkmark \end{array}$$

$$\Rightarrow P(n) \checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

---

RÉCURRENCE FORTE

$$\begin{array}{l} P(0) \checkmark \\ P(k) \checkmark \quad \forall 0 \leq k < n \Rightarrow P(n) \checkmark \end{array}$$

$$\Rightarrow P(n) \checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

---

CRYPTO

THÉORIE DES NOMBRES

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Nombre premiers

$p$  est premier s'il a exactement

12 est premier?  
3 · 4

33 premier?  
3 · 11

2 diviseurs.

(1 et  $p$ )

21 est premier?

$$n = 2 \cdot 6$$

$$2 \geq 2$$

$$6 \geq 2$$

$n$  est composé.

Liste des 10 premiers nombres premiers

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Factoriser

ÉRATOSTHÈNE

CRIBLE

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14  
15 16 17

Liste des nombres premiers inférieurs à 100

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

25 premiers  $\leq 100$

$$n = 2 \cdot 6$$

$n$  composé

$\Rightarrow$

$$a \leq \sqrt{n}$$

$$b \leq \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$$

$$x > \sqrt{n} \quad y > \sqrt{n}$$

$$x \cdot y > n$$

2M est premier? ✓

A' tester :  $f_1, f_2, f_3, f_4, M, N$

$p$  tq.  $p \leq \sqrt{2M}$

3.1.1

3.1.2 abde

3.1.3 }  
3.1.4 } Réurrence

3.2.8 à 3.2.13

Affirmation:

$n^3 - n$  est un multiple de 3  
 $P(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

---

$$n = 5$$

$$n^3 = 125$$

$$n^3 - n = 120 = 3 \cdot 40 \quad \checkmark$$

---

$$n = 0$$

$$0^3 - 0 = 0$$

$$0 = 3 \cdot 0 \quad \checkmark$$

Preuve par réurrence sur  $n$  :

-  $P(0)$  est  vraie  car  $0^3 - 0 = 0$  et  $0 = 3 \cdot 0$

↑  
incrément

- Supposons que  $P(n)$  est vraie et montrons  
que  $P(n+1)$  est vraie aussi.

On suppose que

$$n^3 - n = k \cdot 3 \quad k \in \mathbb{N}$$

hypothèse de récurrence

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

$$= \boxed{n^3 - n} + 3n^2 + 3n$$

hyp. de réc.  
↓

$$\begin{aligned} &= k \cdot 3 + 3n^2 + 3n = 3(k + n^2 + n) \\ &= 3m \end{aligned}$$

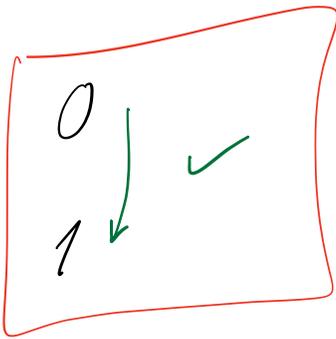
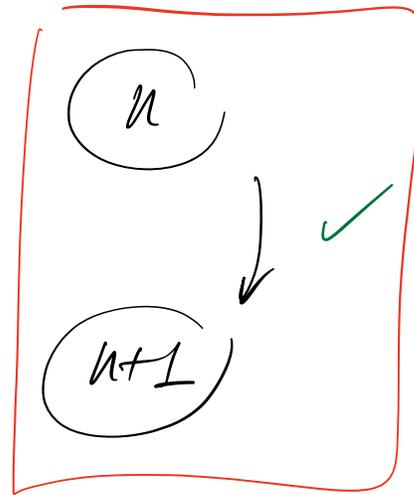
⇒ Si  $n^3 - n$  est mult. de 3  
lors  $(n+1)^3 - (n+1)$  aussi!

⇒  $P(n)$  est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}$

CQFD

31 536 000 000

31 536 000 001



Principe de récurrence.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1)$$

$$= (n-1)n(n+1)$$

$n-1, n, n+1$  sont 3 nombres consécutifs

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Affirmation:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\forall n \geq 1$

preuve: Pr récurrence sur  $n \geq 1$

$P(1)$  est vraie?

incrément de la réc.

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \checkmark$$

$P(2)$  est vraie?

$$1+2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \quad \checkmark$$

$P(n) \checkmark \Rightarrow P(n+1) \checkmark$

hypothèse de réc.

$$P(n+1) : 1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Supposons que  $P(n)$  est vraie.  $\left( 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \right)$

On a

$$\boxed{1+2+\dots+n} + n+1 \stackrel{\text{hyp de réc}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{1}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow P(n+1)$  est vraie

$\Rightarrow$  Le résultat est démontré.

CQFD

Exercice Démontrer la formule de la 2<sup>ème</sup> ligne

de la p. 15 du formulaire CRM.

(Somme des  $n$  premiers carrés)  $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$