$$\boxed{\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ n^3 - n \equiv 0 \mod 3 \end{array}}$$

À démontrer

- directement; (1)
- par réc. sur n. (2)

<u>preuve 1</u>:

$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$$

$$= \underbrace{(n-1)}_{x}\ \underbrace{n}_{y}\ \underbrace{(n+1)}_{z}$$

Les nombres x, y et z sont des entiers consécutifs.

Sur 3 entiers consécutifs, il y a forcément un multiple de 3.

$\Rightarrow$ $n^3 - n = 3 \cdot \ell$ avec $\ell \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$

CQFD

preuve 2 : Par réc. sur n.

$\boxed{n=0}$ $\quad n^3 - n = 0^3 - 0 = 0$ et $0 \equiv 0 \mod 3$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$ Hyp. de réc : $n^3 - n \equiv 0 \mod 3$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1}$$

$$= n^3 - n + \underbrace{3n^2 + 3n}_{\equiv 0 \mod 3} \equiv n^3 - n \mod 3$$

$$\equiv 0 \mod 3$$

Hyp. de réc.

CQFD