Preuves à connaître pour le TE du 27/05

Résultat 2 du 06/05/2026

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, prop. du 05/05/2026

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, prop. du 12/05/2026

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, prop. du 13/05/2026

$\left(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}\right) \Rightarrow \left(\frac{x+1}{x+2} \neq 1\right)$, 3.1.2

$(n \in \mathbb{N},\ n > 3) \Rightarrow (n^2 - n - 6 \equiv 0 \mod 2)$, 3.1.6

$(\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}) \Rightarrow (\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N})$

<u>Prop.</u> $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

preuve : par récurrence sur n.

$\boxed{n=0}$ $\quad (x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}$

$\boxed{n=1}$ $\quad (x+y)^1 = x+y = \binom{1}{0} x y^0 + \binom{1}{1} x^0 y$

Supposons que le résultat est vrai pour tout n et montrons que cela implique que le résultat est vrai pour $n+1$. (n ✓ $\Rightarrow$ $(n+1)$ ✓)

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y)$$

hypothèse de récurrence

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) \cdot (x+y)$$

distributivité

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) \cdot x + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) \cdot y$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^{k+1}$$

$$\begin{aligned}
= \underbrace{\binom{n}{0}}_{\binom{n+1}{0}} x^{n+1} &+ \binom{n}{1} x^n y + \binom{n}{2} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n-1} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n} x y^n \\
&+ \binom{n}{0} x^n y + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n-1} x y^n
\end{aligned}$$

$$\binom{n+1}{1} \qquad \binom{n+1}{2} \qquad \binom{n+1}{n-1} \qquad \binom{n+1}{n} \qquad \binom{n+1}{n+1} + \binom{n}{n} y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^n y + \dots + \binom{n+1}{n} x y^n + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

CQFD

<u>Prop.</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$

<u>preuve.</u> Par l'absurde.