Prop. $\forall\, k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$, on a

Pour tout

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

preuve: Par déf $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} =$$

$$\frac{n!\,(k+1)}{(n-k)!\,\boxed{(k+1)\,k!}} + \frac{(n-k)\,n!}{(n-k)\,(n-k-1)!\,(k+1)!} = $$

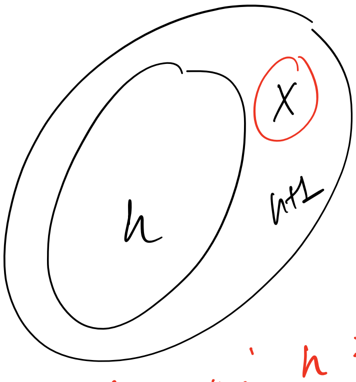
$$\underbrace{(n-k)\,(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-k)!}$$

$$(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (k+1)!$$

$$\frac{n!\,(k+1)}{(n-k)!\,(k+1)!} + \frac{(n-k)\,n!}{(n-k)!\,(k+1)!} =$$

$$\frac{n!\,(k+1) + (n-k)\,n!}{(n-k)!\,(k+1)!} =$$

$$\frac{n!\,(\overbrace{n-k+k+1}^{n+1})}{(n+1-(k+1))!\,(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\,(k+1)!} \overset{\text{déf}}{=} \boxed{\binom{n+1}{k+1}}$$




$k$ parmi $n$ : # groupes de taille $k+1$ avec $X$

$k+1$ parmi $n$ : # groupes de taille $k+1$ sans $X$

Conséquence : La $n^{\text{ème}}$ ligne du △ de Pascal est :

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Exemple : $n = 3$

$$\frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{6}{1\cdot 2} = 3$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \qquad\qquad (x+y)^3$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}=\binom{3}{1}$$

$\boxed{\text{Preuve par réc sur } n.}$

$n=0$ $\qquad \binom{0}{0}=1$ ✓

$n=1$ $\qquad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \longrightarrow 1 \quad 1$ ✓

$\boxed{\text{Supposons que c'est vrai pour } n}$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \boxed{\binom{n}{k} \quad \binom{n}{k+1}} \quad \dots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{0} \qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1} \qquad \boxed{\binom{n+1}{k+1}} \qquad \binom{n+1}{n} \quad \binom{n+1}{n+1}$$

$1$ $\qquad$ Prop. $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1$

CQFD