Résultat 1 : $n \in \mathbb{N}$

$$n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}$$

preuve : n pair

$\Rightarrow n = 2 \cdot k$ pour $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$

$\Rightarrow n^2$ est pair car $\ell = 2k^2 \in \mathbb{N}$

et donc $n^2 = 2 \cdot \ell$ pour $\ell \in \mathbb{N}$

CQFD

Résultat 2 : $n \in \mathbb{N}$

$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}$$

preuve : exercice

Prop. $\forall n \in \mathbb{N}$

pour tout n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair

Preuve: $\boxed{\Rightarrow}$ cf. résultat 1

$\boxed{\Leftarrow}$ Le résultat 2 donne :

n impair $\Rightarrow$ n^2 impair, contraposition

ce qui implique directement que

$\neg(n^2 \text{ impair}) \Rightarrow \neg(n \text{ impair})$ ← contraposée

négation négation

Or $\neg(n^2 \text{ impair}) \Leftrightarrow n^2$ pair

et $\neg(n \text{ impair}) \Leftrightarrow n$ pair

Donc n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

CQFD

Coefficients binômiaux

$$\binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3}$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y + y^5$$

$$\binom{5}{4}$$

					1							
				1		1						$x+y$
			1		2		1					$(x+y)^2$
		1		3		3		1				$(x+y)^3$
	1		4		6		4		1			$(x+y)^4$
1		5		10		10		5		1		

Choisir 3 parmi 5 pour former un groupe.

A B C D E

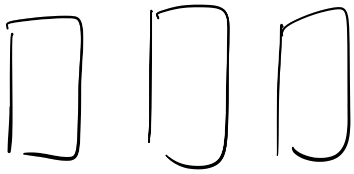
$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \cancel{4}_2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\,\cancel{2}\,1} = C_3^5$$

ABC
ACB
BCA
CBA
...

$= 10$

$\boxed{\text{Choisir } k \text{ parmi } n \text{ sans ordre :}}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$\binom{5}{3}$ 

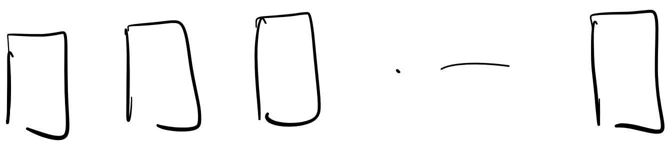
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)\ (2 \cdot 1)} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}$$

~~ordre~~

il en reste 2.

$\boxed{n! \text{ se lit } n \text{ factorielle}}$

$n!$ est le nombre de façons de permuter n objets.



$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \quad \cdots \quad \cdot 1 = n!$$

$$\begin{cases} n! = n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \\ n! = 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

(fonction récursive)

$$100! = 100 \cdot 99!$$

$$99! = 99 \cdot 98!$$

....

Calculate:

$$\binom{6}{3}$$

$$\binom{7}{4}, \binom{7}{3}$$

$$\binom{2}{2}$$

$$\ldots$$

$7 \; \boxed{2nd} \; \boxed{8} \; 4 \longrightarrow \binom{7}{4}$

TI 30:

$\boxed{nCr} \longrightarrow \binom{n}{r}$

Thm: $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Def: $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6}$$

$$= 10 \cdot 3 \cdot 4$$

$$= 120$$

$$3x^4+2x^3-x^2+3x-1 \quad \Big| \; x-2$$

Horner (dividir por $x-a$)

$$3 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad -1$$

$a=2$