$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 3 \\ \vec{j} & -1 & 2 \\ \vec{k} & 2 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) - 2\cdot 2 \\ -\left(1\cdot(-1) - 2\cdot 3\right) \\ 1\cdot 2 - (-1)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\7\\5\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix}-3\\7\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = -3-7+10 = 0$$

Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs.

Le produit mixte de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ est défini comme suit :

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$$

résultat

Preuve du résultat :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$\begin{vmatrix} i & a_1 & b_1 \\ j & a_2 & b_2 \\ k & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\left(7\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}35+7\\-7+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}42\\-6\end{pmatrix}$$

$$=3\cdot 42+4\cdot(-6)$$

$$=126-24=102$$

$$\begin{pmatrix}7\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix}= \qquad =0$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$