Prop. $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

n est pair ssi n^2 est pair ;

n est impair ssi n^2 est impair.

Pour la preuve, utiliser la notion de contraposée.

$$(A \Rightarrow B \iff \underbrace{\neg B \Rightarrow \neg A})$$

Prop. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

preuve Par l'absurde. Supposons le contraire :

$$(*) \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{N}$$

On peut également supposer que $\frac{p}{q}$ est irréductible, p et q n'ont pas de facteur commun.

On peut écrire : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ (élévation au carré de $(*)$)

$\Rightarrow \quad 2q^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad p^2$ est pair

$\Rightarrow \quad p$ est pair (prop. précédente)

$\Rightarrow \quad p = 2 \cdot k \quad$ avec $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad 2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$

$\Rightarrow \quad q^2 = 2k^2 \quad \Rightarrow \quad q^2$ est pair

$\Rightarrow \quad q$ est pair (prop. précédente)

$\Rightarrow \quad 2 \mid p$ et $2 \mid q \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.

Contradictoire

CQFD