Prop. $x, y \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

Conséquences:

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

On en déduit facilement (*)

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

ou encore

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

(*) En effet :

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + \cos(2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

On peut également écrire :

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$= \frac{(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \cdot \frac{1}{\cos x \cos y}}{(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \cdot \frac{1}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{\cos x} \sin y}{\cancel{\cos x} \cos y} + \frac{\sin x \cancel{\cos y}}{\cos x \cancel{\cos y}}}{\frac{\cancel{\cos x}\ \cancel{\cos y}}{\cancel{\cos x}\ \cancel{\cos y}} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

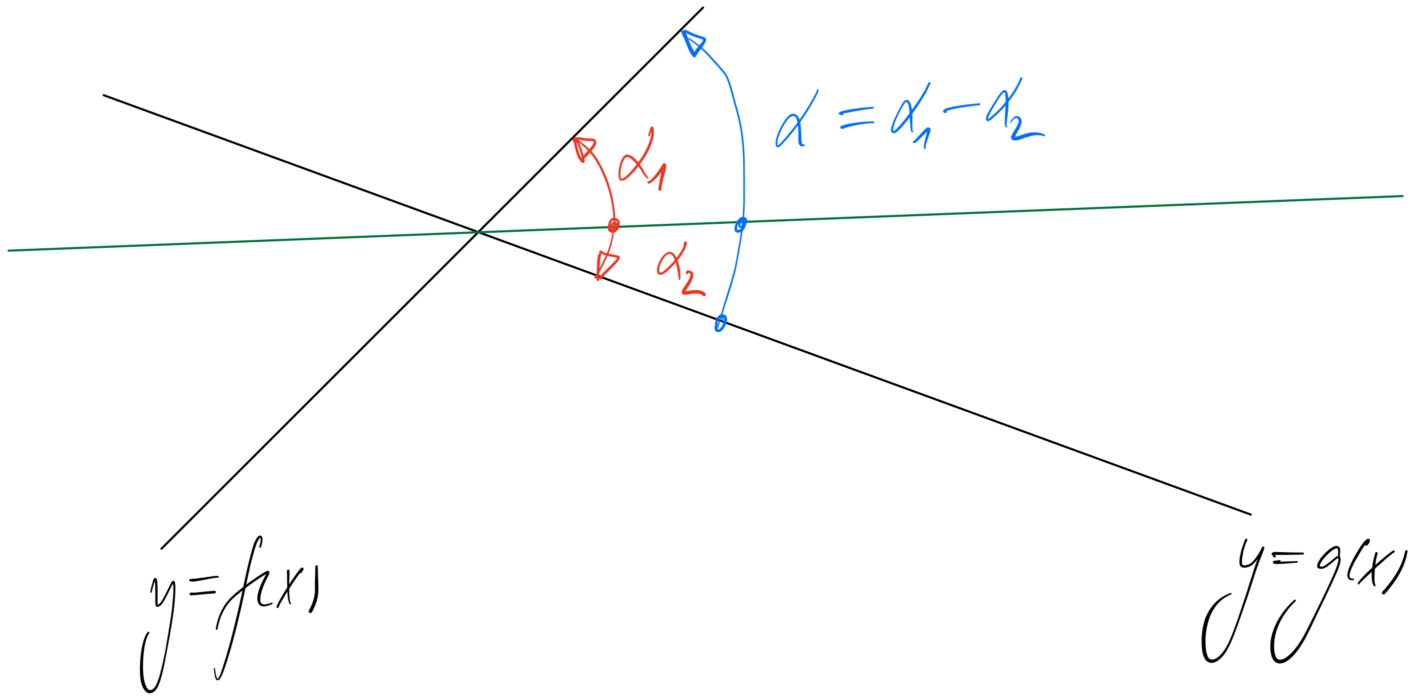
$$= \frac{\dfrac{\sin y}{\cos y} + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \frac{\tan y + \tan x}{1 - \tan x \tan y}$$

Application : Calculer l'angle entre deux droites du plan données par les graphes de deux fonctions affines:

$$f(x) = m_1 x + h_1$$

$$g(x) = m_2 x + h_2$$



$$m_1 = \tan \alpha_1$$

$$m_2 = \tan \alpha_2$$

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \tan(\alpha_1 + (-\alpha_2))$$

$$= \frac{\tan(-\alpha_2) + \tan(\alpha_1)}{1 - \tan(\alpha_1)\tan(-\alpha_2)}$$

$$= \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(\alpha_1)\tan(\alpha_2)}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

L'angle α non-orienté entre deux droites de pentes m_1 et m_2 est donc donné par

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\cos x = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

$$\sin x = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$