

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.

$\exists B(x)$ et $R(x)$ deux polynômes tq.

$$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

avec $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$

Exemple: $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ $Q(x) = (x-2)$

$\exists R \in \mathbb{R}$ tq.

$$P(x) = (x-2) \cdot B(x) + R$$

Conséquence: $P(2) = (2-2) \cdot B(2) + R$
 $= 0 \cdot B(2) + R = R$

$\Rightarrow P(2)$ est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-2)$.

Schéma de Horner

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x + 1$$

$$a = -2$$

$$x-2 = x+2$$

$$3 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 1$$

$$-2 \quad -6 \quad 16 \quad -32 \quad 62 \quad -118$$

$$3 \quad -8 \quad 16 \quad -31 \quad 59 \quad (-117)$$

$$P(x) = (x+2)(3x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 31x + 59) - 117$$

$$\text{et } P(-2) = 3(-2)^5 - 2(-2)^4 + (-2)^2 - 3(-2) + 1 = -117$$

Résultat: Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$
 $\neq 0$

$$P(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a) \mid P(x)$$

$$\Rightarrow a \mid a_0 \quad \leftarrow \text{terme constant}$$
$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

preuve: $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$$P(a) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + \dots + a_n \cdot a^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = a \cdot (-a_1) + a(-a_2 a) + a \cdot (-a_3 a^2) + \dots$$

$$\dots + a \cdot (-a_n \cdot a^{n-1})$$

$$\Rightarrow a_0 = a \cdot [-a_1 - a_2 a - a_3 a^2 + \dots - a_n a^{n-1}]$$

$$\Rightarrow a_0 = a \cdot b \quad \text{avec } b \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a \mid a_0 \quad \text{QFD}$$

Technique de factorisation pour les polynômes
à coefficients entiers:

① Établir la liste des diviseurs
du terme constant.

② À l'aide d'un schéma de Horner,
calculer $P(d)$ pour tout d dans
la liste établie au point ①.

Si $P(d) = 0$, revenir au point ①
en prenant le quotient de la division
par $(x-d)$ comme « nouveau polynôme ».

Example: Factoriser $3x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x + 1$

$$D_1 = \{\pm 1\}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \end{array}$$

$(x-1) \mid P(x)$

$$3 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad | \quad 0$$

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7$$

$$3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad \cancel{6} \quad |$$

$$3 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad -1$$

$$-1 \quad -3 \quad 2 \quad -3 \quad 1$$

$$3 \quad -2 \quad 3 \quad -1 \quad 0$$

$(x+1) \mid P(x)$

$$\Rightarrow x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x-1)(3x^3 - 4x^2 + 3x - 1)$$