$$\sum i^2 = \boxed{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}}$$

$n=5$ $\quad$ $n=5$

$$\boxed{1+4+9+16}+25 = \boxed{\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

$$\boxed{1+4+9+\dots+n^2} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6\cdot 1}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(2n+1) + (n+1)\cdot 6\cdot(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(1) \checkmark \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \checkmark \end{array}} \Rightarrow P(n) \checkmark$$

$$P(1): \quad \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \checkmark$$

$\boxed{3.1.3}$

$$\boxed{\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{array}} \Rightarrow n = p \cdot k$$

premier (p)

entier positif (k)

preuve: n premier ✓

$n = a \cdot b \qquad a, b \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 \leq a < n \\ 2 \leq b < n \end{array}}$$

Par le principe de réc. forte, il existe p premier tq. $a = k \cdot p$ vu que $a < n$

$\Rightarrow \boxed{n = k \cdot p \cdot b = p \cdot (k \cdot b) = p \cdot m \qquad m \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ p est un facteur premier de n.

3.1.4 EUCLIDE

preuve par l'absurde : On suppose le contraire.

Soit $p_1, \dots, p_k$ la liste des nombres premiers.

$$\boxed{m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1}$$

$p_i \nmid m$ (reste 1)

p_i est diviseur de m ? pour $1 \le i \le k$

Non

$$\begin{array}{r|l} m & p_i \\ \hline 1 & \end{array}$$

2, 3, 5 $\qquad 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$

Mais m admet un diviseur premier ! (3.1.3)

Ce diviseur est noté p :

$p \mid m$ et $p \neq p_i \quad 1 \le i \le k$ $\qquad$ Contradiction

3.1.2 b d e (autant que possible)

3.2.8 à 3.2.12

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

$$F_1 = 5$$

$$F_2 = 17$$

$a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b > 0$

$\exists\, q \in \mathbb{Z}$ tq. $a = b \cdot q + r$ et $0 \leq r < b$

$$\begin{array}{rl|ll}
a & 1503 & 13 & b \\ \cline{3-3}
 & 13 & 115 & q \\ \cline{2-2}
 & 203 & & \\
 & 195 & & \\ \cline{2-2}
 & 8 & & r
\end{array}$$

Déf. $a, b \in \mathbb{Z}$ a divise b

$a \mid b$ si $b = k \cdot a$ pour $k \in \mathbb{Z}$

divise

Exemple: $0 \mid 0$ car $0 = 13 \cdot 0$ et $13 \in \mathbb{Z}$

3.2.1
3.2.2

Démos à faire

Exemple: $\boxed{a \mid a \text{ car } a = \underbrace{1}_{k} \cdot a \text{ et } 1 \in \mathbb{Z}.}$

⚠ $\underbrace{\text{Si et seulement si}}_{\text{ou SSi ou } \Leftrightarrow}$

$\boxed{1 \mid a \text{ car } a = \overbrace{a}^{k} \cdot 1 \text{ et } a \in \mathbb{Z}}$