$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad P(n)$$

preuve par réc. sur n :

Si $n = 1$, on a clairement $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Supposons maintenant que $P(n)$ est vraie pour n et montrons que $P(n+1)$ est également vraie.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

hyp. de réc.

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

On voit donc que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est aussi. Le résultat est donc démontré pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par le principe de récurrence.

CQFD