

Sait $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ de degré n .

$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

$$= (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n) \cdot a_n$$

(*) Thm: $P(z)$ admet n zéros $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$
non nécessairement distincts.

Exemple: $(z-1)^n$ admet $1 \in \mathbb{C}$ comme zéro, de multiplicité n .

Prop: Si n est impair et si $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,
alors $P(z)$ admet un zéro réel.

$$P(z) = \sum a_i z^i$$

Prop: $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}) = 0$ si $a_i \in \mathbb{R} \forall i$

Contre-exemple:

$$1z^2 + iz + 1 - i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$z = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4 + 4i}}{2}$$

$$= \frac{-i \pm \sqrt{-5+4i}}{2}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{41}$$

$$x^2 - y^2 = -5$$

$$2xy = 4$$

$$(x+yi)^2 = -5+4i$$

$$2x^2 = -5 + \sqrt{41}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}}$$

$$2y^2 = \sqrt{41} + 5$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{41} + 5}{2}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-i \pm \left(\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{41} + 5}{2}} i \right)}{2}$$

Example: $\textcircled{1} z^2 + \textcircled{3} z + \textcircled{5} = 0$ $\in \mathbb{R}$ $\Delta < 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{11} \cdot i}{2} = \begin{matrix} -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i \\ -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i \end{matrix}$$

$\bar{z}$

Exemple:

$$z^2 + 4z - 1 = 0$$

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \begin{matrix} \underbrace{-2 + \sqrt{5}}_{-2 + \sqrt{5} + 0i} \\ -2 - \sqrt{5} + 0i \end{matrix}$$

z_1

$$-2 + \sqrt{5} + 0i = -2 + \sqrt{5} - 0i = -2 + \sqrt{5}$$

$\bar{z}_1 = z_1$ le conjugué de z_1 est aussi sol.

$$z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z}_2 = z_2 \Rightarrow \text{iden.}$$

Prop. Soit $P(z) = \sum a_k z^k$ $a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k$

lors $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}) = 0$

preuve $\sum a_k z^k = 0 = 0 + 0i$

$$\Rightarrow \overline{\sum a_k z^k} = \bar{0} = 0 = 0 - 0i$$

Propriétés de $\bar{z}$

$$\Rightarrow \sum \bar{a}_k \cdot (\bar{z}^k) = 0 \quad \bar{a}_k = a_k \quad a_k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sum a_k \cdot (\bar{z})^k = 0$$

$$\Rightarrow P(\bar{z}) = 0$$

Q.F.D

D'où le thm. (*):

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ avec a_k réels. et n impair

$P(z)$ admet n zéros qui vont par paires:

z_k et $\bar{z}_k$

Or le nbre de zéros est impair, donc

$\exists i$ tq. $z_i = \overline{z_i}$ est un zéro de P .

$\Rightarrow z_i \in \mathbb{R}$.