2.2.4 c) d)

$$C_n = 2n^2 - 7n$$

$f(x) = 2x^2 - 7x$

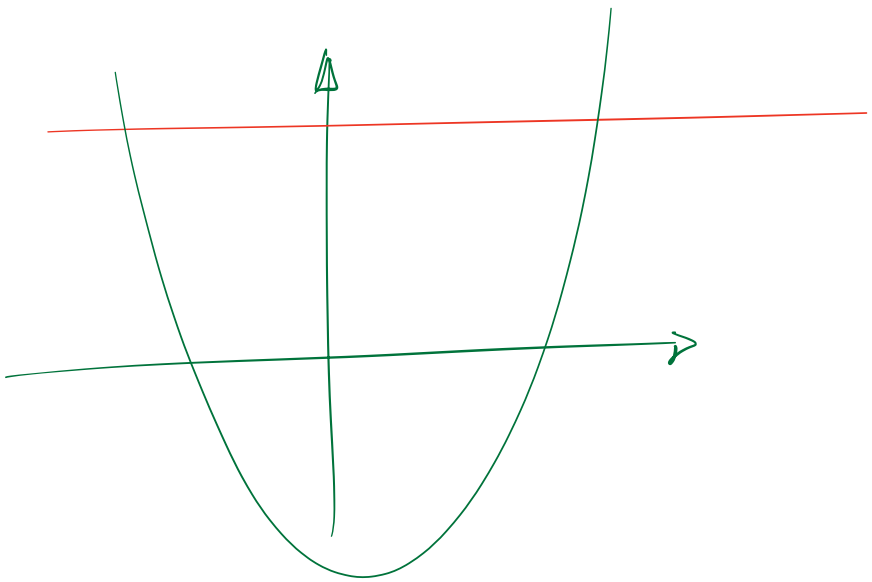
maj. non

min. oui

~~bornée~~

Étude complète

croissante



$$d_n = \frac{n}{n^2+4}$$

$n \geq 3$

bornée { maj. 1 ; min. 0 (lim)

décroissante

Prop. $\dfrac{n}{n^2+10}$ est majorée par 1 $\forall\, n \geq 3$

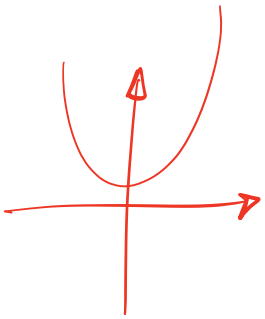
preuve: $n/(n^2+10)$ maj. par 1

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{n^2+10} < 1 \qquad n \geq 3 \Rightarrow n^2+10 \geq 0$$

$\downarrow \cdot (n^2+10)$

$$\Leftrightarrow \quad n < n^2+10$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 - n + 10 > 0$$



Signe de $x^2 - x + 10$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 1 - 40 = -39$$

$\Rightarrow x^2 - x + 10 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ car convexe

$x^2 > x \quad \forall\, x \geq 1$

$\Rightarrow n^2 - n + 10$ est strict. positif si $n \geq 3$

$\Rightarrow \dfrac{n}{n^2+10} < 1$ (voir plus haut)

CQFD

2.2.4 f_1

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 2f_n + 1 \end{cases}$$

f_n croissante par réc. sur n

$f_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 > f_1$ Ancrage OK

$n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark$

Supposons (hyp. de réc.) que $f_n < f_{n+1}$

$f_{n+1} = 2f_n + 1$ $\qquad$ $f_{n+2} = 2f_{n+1} + 1$

Vrai $f_n < f_{n+1}$ $\Big\} \cdot 2$

$\Leftrightarrow \quad 2f_n < 2f_{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad 2f_n + 1 < 2f_{n+1} + 1$

$\Leftarrow$ $f_{n+1} < f_{n+2}$

$\Rightarrow$ Si $f_n < f_{n+1}$ alors $f_{n+1} < f_{n+2}$

$\Rightarrow$ $n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark$ CQFD

$f_1 = 1$ et f_n stric. croiss. $\Rightarrow$ $f_n > 1 \quad \forall n$

Aritmetica:

$a_0 + n \cdot d$

Geometrica:

$r \cdot q^n$

$u_{n+1} = \sqrt{2 u_n}$ $\xrightarrow{n \to \infty}$ $u = \sqrt{2 \cdot u}$

u_n $v_n = u_{n+1}$

$\lim u_n = \lim v_n$

x_n une suite de réels est majorée

s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tq.

$$x_n \leq M \quad \forall n$$

2.2.4 f_1

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 2f_n + 1 \end{cases}$$

$f_1 = 1$

$f_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

$f_3 = 2(2+1)+1 = 4 + 2 + 1 = 7$

$f_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$$\boxed{f_n = 2^n - 1}$$

Preuve : par réc. sur n

$\boxed{n=1}$ $f_1 = 2^1 - 1 = 1$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark}$ hyp. de réc.

$$f_n = 2^n - 1$$

$$f_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

CQFD

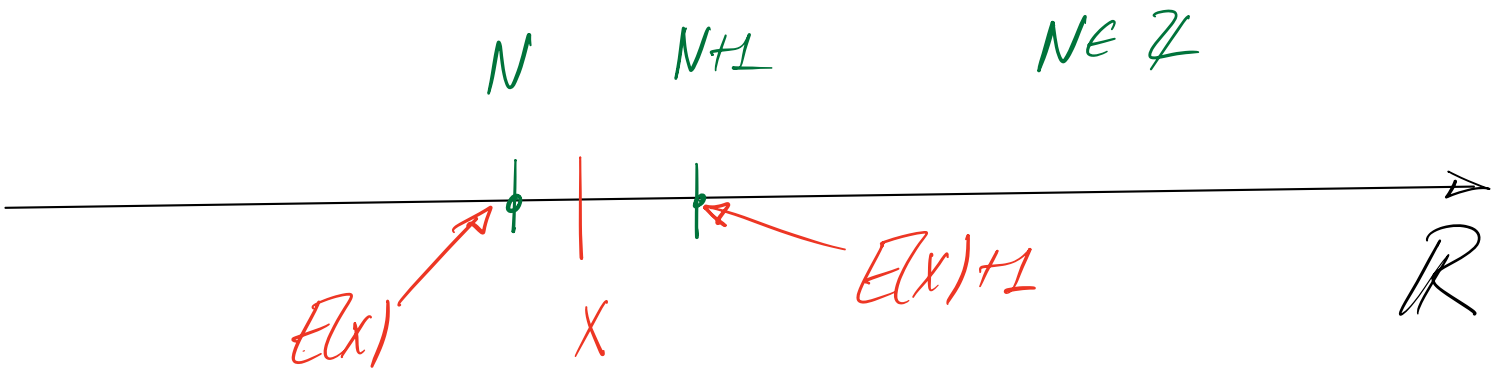
Supposons par l'absurde qu'il existe $M > 0$ tq.

$$f_n < M \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \quad 2^n - 1 < M \quad \forall n$$

$$2^n < M + 1 \quad \forall n$$

Contradiction. $\left(n = \log_2(M+1) + 1 \right)$



N est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

$N = E(x)$ et $\boxed{E(x) \leq x < E(x)+1}$

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 12}{4} = \frac{1}{4} a_n + 3$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \cdot 3 + 3 = \left(\frac{1}{4} + 1\right) \cdot 3$$

$$a_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 1\right) \cdot 3 + 3 = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 1\right) + 1\right) \cdot 3$$

$$= \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right) + 1 \right) \cdot 3$$

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k \right) \cdot 3 = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \cdot 3 = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$\underbrace{\left(1+x+x^2+x^3+ \dots + x^{n-1}\right)}_{\frac{1-x^n}{1-x}} (1-x) = 1-x^n$$

Prop. $a_n = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$

preuve par réc.

$a_1 = 4 - \frac{1}{4^0} = 3$ ✓

n ✓ $\Rightarrow (n+1)$ ✓

$a_n = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$ hyp. réc.

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + 3$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{4^n} + 3}_{\frac{1}{4}\left(4 - \frac{1}{4^{n-1}}\right)} = 4 - \frac{1}{4^n}$$

CQFD

$f_1 \geq 1$

$f_{n+2} = 2f_n + 1$

$f_n \geq n$

$2f_n \geq 2n$

$n \geq 3$

$2f_n + 1 \geq 2n+1 \geq n + (n+2) \geq n+2$

f paire : $f(-x) = f(x)$

f impaire : $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 2f_n + 1 \end{cases}$$

Prop. $f_{n+1} > n \quad \forall n \geq 1$

preuve:

$f_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 > 2$ ✓ Ancrage

n ✓ $\Rightarrow (n+1)$ ✓

$f_{n+1} > n$

$2f_{n+1} > 2n$

$2f_{n+1} + 1 > 2n + 1$

$f_{n+2} > 2n+1 = n + (n+1) \geq n+1$

≥ 3

$\Rightarrow f_{n+2} > n+1$

CQFD

Si f_n est maj. $\Rightarrow$ $f_n < M$ avec $M > 0$

$E(M)+1 = N > M$

$f_{N+1} > N > M$ absurde

$f(x)$ par $(x_1; x_2)$ et $(y_1; y_2)$

$$\begin{cases} f(x_1) = x_2 \\ f(y_1) = y_2 \end{cases}$$