Prop. Soit x_n et y_n deux suites de réels qui convergent vers x et y respectivement. ($x, y \in \mathbb{R}$)

Alors $x_n y_n$ converge vers xy,

$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = x \cdot y$$

preuve: Vu que y_n converge, $\exists\, M_{y_n} > 0$ tq. $|y_n| < M$ $\forall n$ (il existe)

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ tq. si $n \geq N_1 \Rightarrow |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2|x|}$ (très grands)

$\exists\, N_2 \in \mathbb{N}$ tq. si $n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

$n \geq \max(N_1, N_2)$

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy|$$

$$= |(x_n - x) y_n + x(y_n - y)|$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$$\text{inég. triang.} \leq |x_n - x| \cdot |y_n| + |x|\,|y_n - y| < |x_n - x| \cdot M + |x|\,|y_n - y|$$

$\to 0$

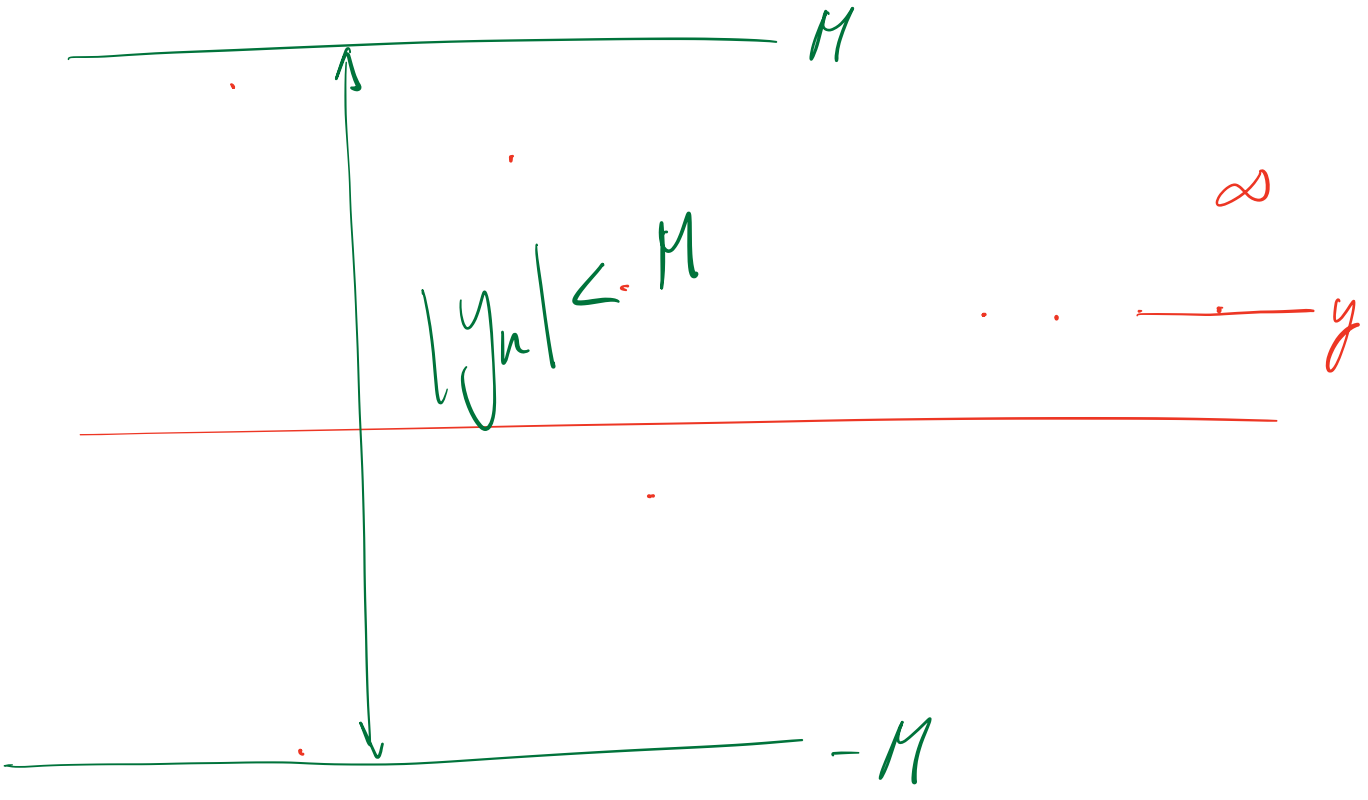
$$< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |x| \frac{\varepsilon}{2|x|}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, n \geq \max(N_1, N_2)$$

$$|x_n y_n - xy| < \varepsilon$$

CQFD



2.2.9

$u_1 = \sqrt{2}$

$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

a) Croissante et maj. par 2.

Fait: Si $xy \geq 0$

$x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

Croissante (par réc. sur n)

$n=1$ $\quad \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow u_1 < u_2$

$\Leftrightarrow \quad 2 < 2\sqrt{2}$ ✓

$\sqrt{2} > 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 < \sqrt{2}$ ✓

n ✓ $\Rightarrow$ $n+1$ ✓ hyp de réc. $u_n < u_{n+1}$

$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

$u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}}$

hyp. de réc. $u_n < u_{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad 2u_n < 2u_{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2u_n} < \sqrt{2u_{n+1}}$

$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} < u_{n+2}$

Majorée par 2 par réc. sur n

$n=1$ $u_1 = \sqrt{2} < 2$ ✓

n ✓ $\Rightarrow$ $n+1$ ✓ hyp. de réc. $u_n < 2$

$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$