État des lieux

Soit $u_n \longrightarrow u$ une suite qui converge.

Alors $\exists M \geq 0$ tq. $|u_n| < M \quad \forall n$,

u_n est <u>bornée</u>

Soit $v_n \longrightarrow v$, une autre suite qui converge.

Alors $u_n + v_n \longrightarrow u+v$

$\Leftrightarrow \lim (u_n + v_n) = u+v$

Prop. Soit $x_n \to x$ et $y_n \to y$ deux suites convergentes. La suite $x_n \cdot y_n$ converge vers xy.

Travail préliminaire :

$x_n \cdot y_n \longrightarrow xy$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ tq. si $n > N$,

alors $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$

A démontrer

$\forall \varepsilon \; \exists N_1$ tq. $n > N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

$\exists N_2$ tq. $n > N_2 \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon$

Comm

Observation $|x_n y_n - xy| =$

$|a+b| \le |a|+|b|$

$= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| =$

inégalité du $\triangle$

$\le |(x_n - x) y_n + x(y_n - y)| \le |(x_n - x) y_n| + |x(y_n - y)|$

$= |x_n - x| \cdot |y_n| + |x| \cdot |y_n - y|$

$|y_n|$: borné

$|x|$: fixe

$|x_n - x|$ et $|y_n - y|$ aussi petit que nécessaire

2.2.4

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ $\quad n \geq 1$

$a_n \to 2 - 0 = 2$

car $2 \to 2$

$\frac{1}{n^2} \to 0$

$a_1 = 2 - \frac{1}{1^2} = 1$

$a_2 = 2 - \frac{1}{4} = 1{,}75$

$a_3 = 2 - \frac{1}{9} = 1{,}8888\ldots = 1 - 0{,}1111\ldots$

$a_4 = 2 - \frac{1}{16} = 2 - 0{,}0625 = 1{,}9375$

$a_n \to 2$, probablement

$a_n \geq 1$ minoré

$a_n < 2$ majoré

$a_{n+1} \geq a_n$

Reihes

$$\frac{\sqrt{n^4-n^3+1}}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n^4} = n^2$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{6}}$$

$$\frac{\sqrt{n^4-n^3+1} \cdot \frac{1}{n^2}}{2n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{\sqrt{n^4-n^3+1}}{\sqrt{n^4}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2} \qquad \frac{1}{n} \to 0, \quad \frac{1}{n^2} \to 0$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim \frac{\sqrt{n^4-n^3+1}}{2n^2} = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)\cdot\frac{1}{n}}{n\cdot\frac{1}{n}} \quad \ll \frac{\infty-\infty}{\infty} \gg \quad \text{IND.}$$

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{1} \longrightarrow \frac{1-1}{1} = 0$$

2.2.8

$$\frac{\sin(x+1)-\sin(x-1)}{\sin x} = \frac{2\cdot\cos\left(\frac{x+1+x-1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+1-(x-1)}{2}\right)}{\sin x}$$

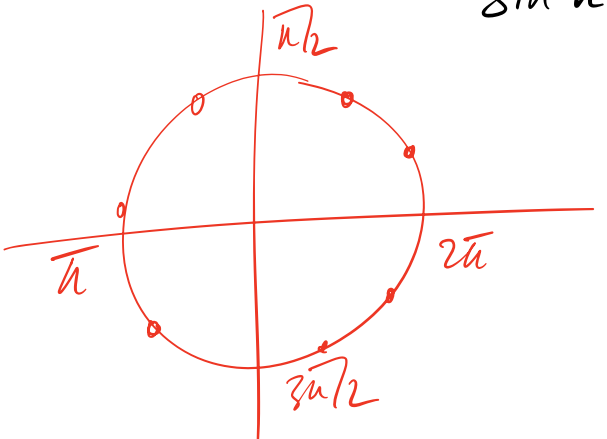
$$= \frac{2\cos x\cdot\sin 1}{\sin x}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\frac{\sin x\cos 1 + \cos x\sin 1 - \sin x\cos(-1) - \cos x\sin(-1)}{\sin x} =$$

$$\frac{\sin x\cos 1 + \cos x\sin 1 - \sin x\cos 1 + \cos x\sin 1}{\sin x} =$$

$$\frac{2\cos x\sin 1}{\sin x} = 2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin 1$$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\sin n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\cdot\sin 1\cdot\frac{\cos n}{\sin n} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\sin 1\cdot \underbrace{\cot(n)}_{\text{oscille}}$$

$\Rightarrow$ diverge