

Suites de nombres réels

2.1.2 : $x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 1 0,75 $0,75^2$ $0,75^3$

$$u_n = q^n$$

$$q \in]0; +\infty[$$

$$q = 1$$

$$u_n = 1 \quad \forall n$$

$$q < 1$$

$$q^n \longrightarrow 0$$

converge

$$q = 0,98$$

$$q^0 = 1 \quad q^1 = 0,98 \quad q^2 = 0,98 \cdot 0,98$$

$$q^3 = 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98$$

$$q > 1$$

$$q^n \longrightarrow \infty$$

diverge

$$\boxed{\cos x = x}$$

eq. transcendente

$$x_n = \cos(\underbrace{\cos(\dots \cos(x_1))}_{n \text{ fois}})$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,74$$

Def. Une suite x_n est une application
de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto x_n = x(n)$$

Suite définie par récurrence

Exemple:

$$x_0 = 1$$

$$x_n = x_{n-1} + n$$

$$n \geq 1$$

$$x_1 = x_0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + 2 = 2 + 2 = 4 = 1 + 1 + 2$$

$$x_3 = x_2 + 3 = 4 + 3 = 7 = 1 + 1 + 2 + 3$$

$$x_4 = x_3 + 4 = 7 + 4 = 11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4$$

$$x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$x_n = 1 + \sum_{i=1}^n i$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$$x_5 = x_4 + 5 = 11 + 5 = 16 = \boxed{1+1+2+3+4+5}$$

$$x_n = n^2 - 8$$

$$x_n = \frac{1}{n^2 + 2}$$

$$x_n = \mathcal{L}(ux) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_n = \frac{1}{x_{n-1} - 1} \end{cases}$$

2.2.3

d) $-\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{6}$

$\frac{0}{0+3} = 0$

$$\frac{n}{n+3}$$

$$x_n = \frac{n}{n+3} \quad n \geq -1$$

$$\frac{-1}{-1+3} = -\frac{1}{2}$$

Définition: Soit x_n avec $n \in \mathbb{N}$ une suite de $\mathbb{R}$.

Soit c un nombre réel.

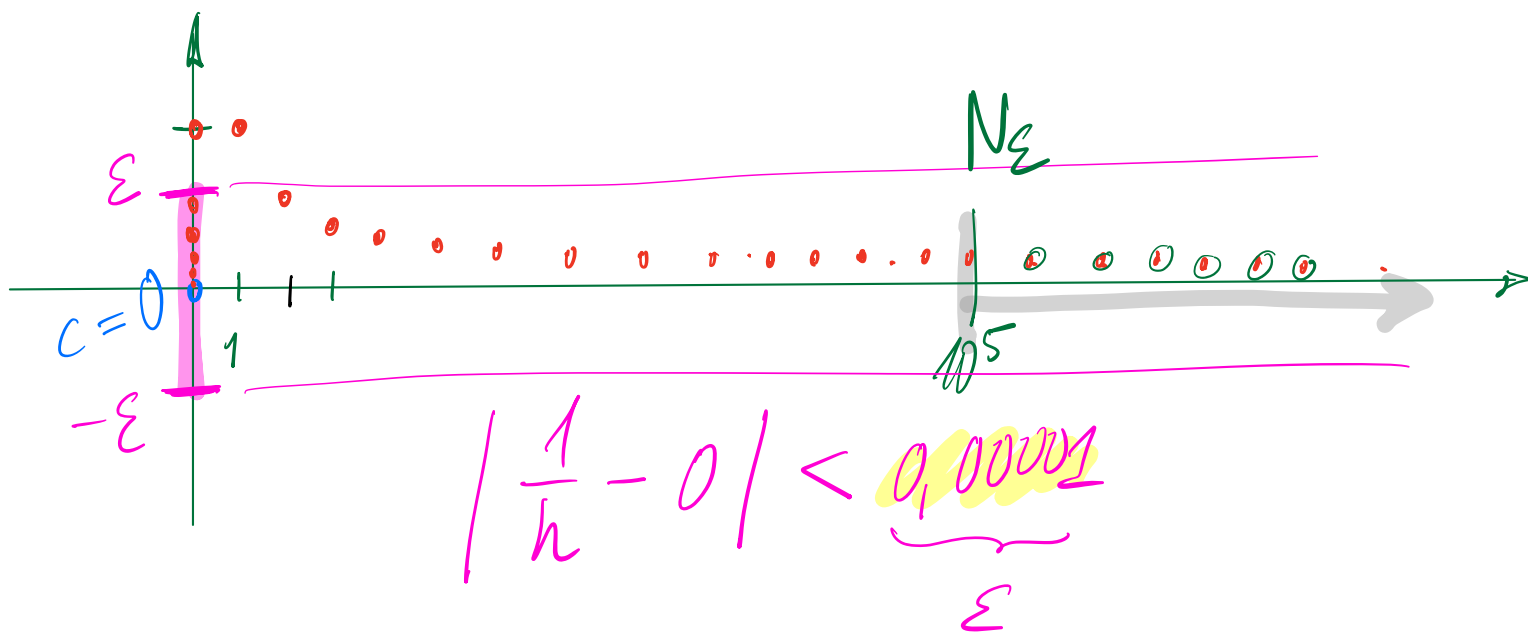
On dit que x_n converge vers c si pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$

tg. $|x_n - c| < \varepsilon$ si $n \geq N_\varepsilon$.

Exemple:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$...



$$\frac{1}{n} < 0,00001$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{0,00001} < n$$

$$\underbrace{100\ 000}_{N_\varepsilon} < n$$

$$\text{Si } n > 100\ 000, \text{ alors } \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = |x_n - c| < \varepsilon$$

$c = 0,00001$

Notation: Si x_n converge vers c , on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim x_n = c$$

Une suite non convergente diverge.

Example: $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

preuve: Soit $\varepsilon > 0$

Idee: $\lim x_n = 0$ $(C=0)$

$$|x_n - C| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$|2| = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \geq 0 \\ -2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} > 0 \text{ si } n \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

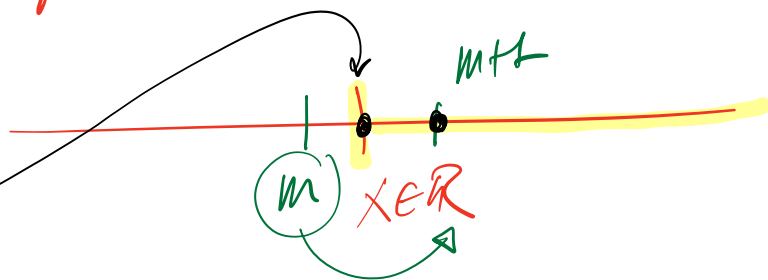
$E(x)$ partie
entière

Prop. Si $x \in \mathbb{R}$, $\exists m \in \mathbb{N}$

tg $m < x < m+1$.

Il suffit que $n > E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$

partie entière



On pose donc $N_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$

et si $n \geq N_\varepsilon$, alors

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ par construction}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |X_n - c| < \varepsilon$$

CQFD