Résoudre : $\boxed{y' - y = e^{2x}}$

$a(x) = -1$
$b(x) = e^{2x}$

Éq. homogène associée :

$y' - y = 0$ ✓

Forme générale : $\boxed{y' + a(x) \cdot y = b(x)}$

Éq. linéaire du 1er ordre sous forme standard

$$\begin{cases} y' + a(x) \cdot y = b(x) & \text{éq. 1} \\ \boxed{y' + a(x) \cdot y = 0} & \text{éq. 2 (homogène associée à éq. 1)} \end{cases}$$

$$y' = -a(x) \cdot y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a(x)$$

$y = 0$ est solution

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = - \int a(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = - \int a(x)\, dx + k$$

$$\Leftrightarrow \quad |y| = e^{-\int a(x)\,dx} \cdot e^{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm e^{k} \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$$

$\Rightarrow$ Sol. générale de $y' + a(x)\,y = 0$: $\boxed{c = \pm e^{k} \text{ ou } c = 0}$

$$y = c \cdot e^{-\int a(x)\,dx} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

Exemple : $y' - y = 0$ $\qquad \dfrac{y'}{y} = 1$

$\int$

$$\ln|y| = x + k$$

$$y = \pm e^{k} \cdot e^{x} \Rightarrow y = c\,e^{x}$$

$$y = c \cdot e^{-\int a(x)\,dx} \quad \text{avec } a(x) = -1$$

$$y = c \cdot e^{\int 1\,dx} = c \cdot e^{x}$$

<u>Résultat</u> : Si $\boxed{y = f(x)}$ est solution de $y' - y = e^{2x}$,

alors toutes les solutions de $y' - y = e^{2x}$

s'écrivent :

$$y = \underbrace{C \cdot e^{x}}_{\text{solution générale de } y'-y=0} + \underbrace{f(x)}_{\text{solution particulière}}$$

éq. hom. associée

Trouver une solution particulière de

$$y' + a(x)\, y = b(x) \qquad (*)$$

par la méthode du <u>facteur intégrant</u>

On multiplie $(*)$ par $\boxed{e^{\int a(x)\,dx}}$

$$y' e^{\int a(x)\,dx} + a(x) \cdot y \cdot e^{\int a(x)\,dx} = b(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$$

$$y' \cdot u + y \cdot u' = (y \cdot u)'$$

$$y' \cdot e^{\int a(x)\,dx} + y \cdot \underbrace{a(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}}_{\overset{\checkmark}{=}\left(e^{\int a(x)\,dx}\right)'} = b(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$$

$$\left(e^{h(x)}\right)' = e^{h(x)} \cdot h'(x)$$

$$\left(e^{\int a(x)\,dx}\right)' = e^{\int a(x)\,dx} \cdot \underbrace{\left(\int a(x)\,dx\right)'}_{a(x)} = e^{\int a(x)\,dx} \cdot a(x)$$

$$\boxed{y' \cdot e^{\int a(x)\,dx} + y \cdot \left(e^{\int a(x)\,dx}\right)'} = b(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$$

$$\boxed{y' \cdot u + y \cdot u'} = \boxed{(y \cdot u)'}$$

$$\boxed{\left(y \cdot e^{\int a(x)\,dx}\right)'} = b(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$$

On intègre

$$y \cdot e^{\int a(x)\,dx} = \int b(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}\,dx$$

$$y = \underbrace{e^{-\int a(x)\,dx} \cdot \int b(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx} \cdot dx}_{f(x)}$$

Dans notre cas: $a(x) = -1$

$b(x) = e^{2x}$

$$y = e^{x} \cdot \int e^{2x} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

$$y = e^{x} \cdot \int e^{x}\,dx = e^{2x}$$

$\Rightarrow$ Solution de $(*)$ $\boxed{y = C \cdot e^{x} + e^{2x}}$

Éq. diff.

1er ordre
- à variables séparables; (10/02/2025)
- linéaires. (24/02/2025)

2ème ordre linéaires à coefficients constants.