$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "H"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "P^{-1}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H^*"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
$$

① Polynôme caractéristique $P(x)$

② Valeurs propres — zeros de $P(x)$

③ Vecteurs propres
(sous-esp. propres)

$$H^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad B^*$$

$$H^* = P^{-1} \cdot H \cdot P$$

① $$\begin{vmatrix} 11-x & 9 & 6 \\ -9 & -11-x & -4 \\ 2 & 10 & -1-x \end{vmatrix} = \det\left(H - x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(H - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right) u =$$

$$Hu - xu = 0$$

$$\Leftrightarrow Hu = xu$$

$\Leftrightarrow$ x est une val. propre

$$(11-x)\cdot\big((11+x)(1+x)+40\big)$$

$$+9\cdot\big(-9(1+x)-60\big)$$

$$+2\cdot\big(-36+(11+x)\cdot 6\big)$$

$$(11-x)\left(11+12x+x^2+40\right)-9\left(9x+69\right)+2\left(6x+30\right)=$$

$$(11-x)\left(x^2+12x+51\right)-81x-621+12x+60 =$$

$$(11-x)(x^2+12x+51)-69x-561 =$$

$$\cancel{11x^2}+\cancel{132x}+\cancel{561}\cancel{-x^3}\cancel{-12x^2}\cancel{-51x}\cancel{-69x}\cancel{-561} =$$

$$-x^3-x^2+12x=0$$

$$-x\left(x^2+x-12\right)=0 \Leftrightarrow \boxed{-x(x-3)(x+4)=0}$$

$$P(x) = -x^3-x^2+12x$$ Polynôme caractéristique

(2)

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x=0\ ;\ x=3\ ;\ x=-4$$

(3) $E_0 \leftarrow$ Esp. propre associé à val. propre 0

$$\begin{pmatrix} 11-0 & 9 & 6 \\ -9 & -11-0 & -4 \\ 2 & 10 & -1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 9 & 6 \\ -9 & -11 & -4 \\ 2 & 10 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1/2 \\ -9 & -11 & -4 \\ 11 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1/2 \\ 0 & 34 & -17/2 \\ 0 & -46 & 23/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1/2 \\ 0 & 17 & -17/4 \\ 0 & -23 & 23/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -5x_2 + 1/2\, x_3 = -3/4\, x_3 \\ x_2 &= 1/4\, x_3 = 1/4\, x_3 \\ x_3 &= x_3 = 1\, x_3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$E_0 = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{droite} \checkmark$$

E_{-4} Esp. propre associé à v.p. -4

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 & 6 \\ -9 & -7 & -4 \\ 2 & 10 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3/2 \\ -9 & -7 & -4 \\ 15 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3/2 \\ 0 & 38 & 19/2 \\ 0 & -66 & -33/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= -5x_2 - 3/2\, x_3 &&= -1/4\, x_3 \\ x_2 &= -1/4\, x_3 &&= -1/4\, x_3 \\ x_3 &= x_3 &&= x_3 \end{aligned}$$

$$E_{-4} = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

E_3 :
$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -9 & -14 & -4 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -9 & -14 & -4 \\ 8 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 31 & -22 \\ 0 & -31 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -22/31 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -5x_2 + 2x_3 \\ x_2 &= 22/31\, x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

$$x_1 = -110/31\, x_3 + 62/2\, x_3 = -48/31\, x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -48 \\ 22 \\ 31 \end{pmatrix}$$

La base $\mathcal{B}^*$ s'écrit : $\left(\underset{E_0}{\overset{\text{v.p. } 0}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}}} ; \underset{E_{-4}}{\overset{\text{v.p. } -4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}} ; \underset{E_3}{\overset{\text{v.p. } 3}{\begin{pmatrix} -48 \\ 22 \\ 31 \end{pmatrix}}} \right)$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -48 \\ -1 & 1 & 22 \\ -4 & -4 & 31 \end{pmatrix} \qquad H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

f) $\ker h = E_0$