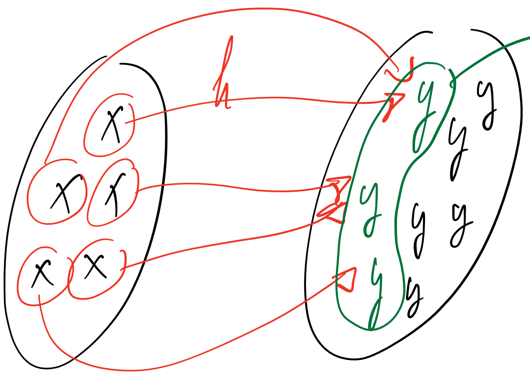
$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3$$

$$Im(h) = \{ y \in \mathbb{R}^3 \;/\; \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ tq. } h(x) = y \}$$



Im(h)

Tous les éléments qui sont «atteints» par h :

$$\boxed{\text{il existe } x \text{ au départ tq. } y = h(x)}$$

revient à dire que $y \in Im(h)$

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = y$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Trouver y revient à caractériser toutes les combinaisons linéaires de la forme :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Les trois vecteurs colonnes sont indép.

$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^3}_{\text{surj.}}$ et $\underbrace{\ker(h) = 0}_{\text{inj.}}$

$\Rightarrow$ surj. / inj. et bij.

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3$ h linéaire

$\dim \ker(h) + \dim \mathrm{Im}(h) = 3$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ g linéaire

$\dim \ker(g) + \dim \mathrm{Im}(g) = 2$

$\ker(h)$: ss-espace vect. de $\mathbb{R}^2$

1) $\boxed{\{(0;0)\} \quad \text{base} : \emptyset}$

2) droite $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

base: $\left[\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]$

3) $\mathbb{R}^2$ base: $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$

$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det H = 4 + 6 = 10 \neq 0$

$\Rightarrow \ker h = 0$

base $\emptyset$
ker

$\operatorname{Im} h = \mathbb{R}^2$

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$ base Im

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det G = -6+6 = 0 \implies G$ n'est pas bij.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

1 pivot

$\ker g : \quad x_1 - 3x_2 = 0 \qquad x_1 = 3x_2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_2 = x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

base de $\ker g$: $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$\operatorname{Im} g : \; k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ base de $\operatorname{Im} g$: $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

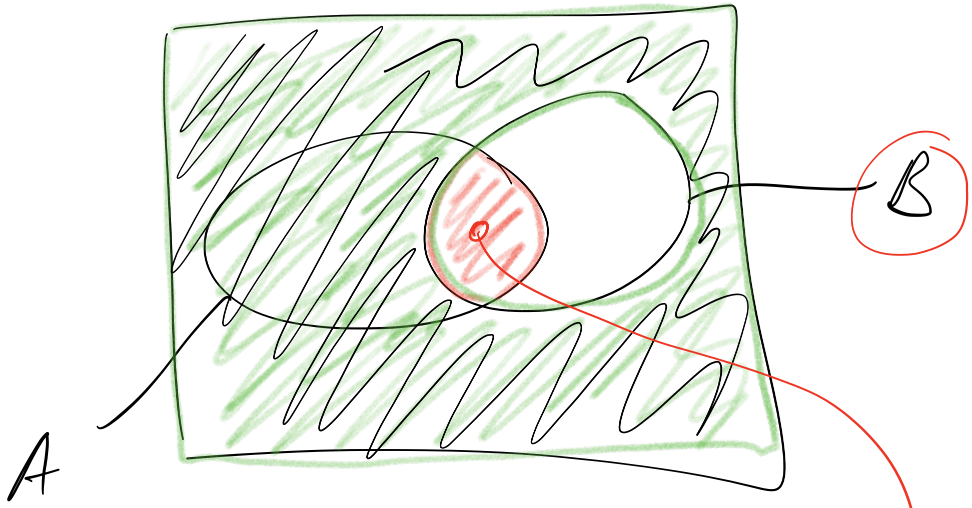
$P(A|B)$

si

$P(A)$

$P(B)$

$P(A \cap B)$



$P(U) = 1$

Le calcul de $p(A|B)$ présuppose B : B s'est produit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$