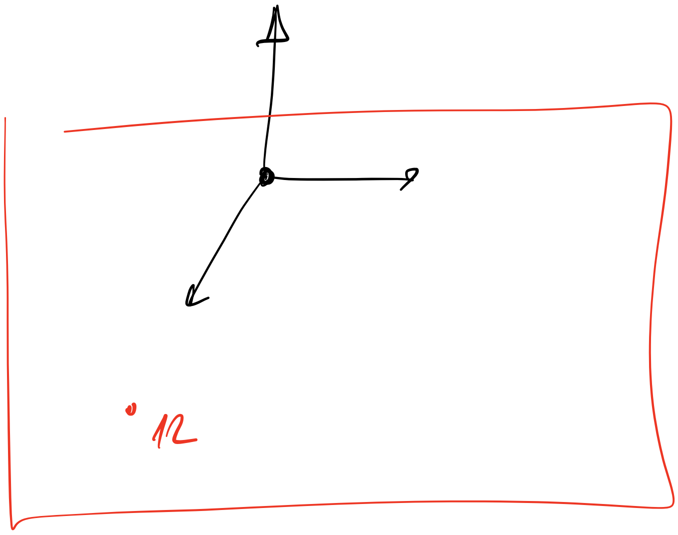
$\boxed{1.2.6}$

$(0;0;0) \in V$

$au+bv \in V$ si' $u,v \in V$




$x = 12$

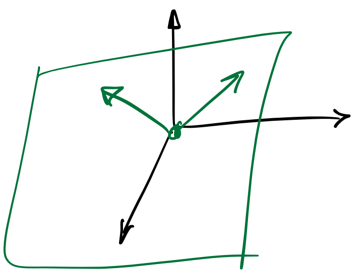
$\pi : \boxed{3x - y = 0}$ plan

$x=0$

$y=0$

$z=0$ ✓

$0 \in \pi$



$(x_1, x_2, x_3)$ avec $3x_1 - x_2 = 0$

$(v_1, v_2, v_3)$ avec $3v_1 - v_2 = 0$

$$a(x_1,x_2,x_3) + b(v_1,v_2,v_3) = (\underbrace{ax_1+bv_1}_{y_1}, \underbrace{ax_2+bv_2}_{y_2}, \underbrace{ax_3+bv_3}_{y_3})$$

$$3y_1 - y_2 \overset{?}{=} 0$$

$$\boxed{3(ax_1+bv_1) - (ax_2+bv_2) \overset{?}{=} 0}$$

$$\underbrace{a\underbrace{(3x_1 - x_2)}_{0} - b\underbrace{(3v_1 - v_2)}_{0}}_{=0} \overset{?}{=} 0 \quad \checkmark$$

## 1.2.8

a) $\boxed{v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}$ un vecteur de $A$

$v \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \leftarrow$ matrice 2x2

1. $0 \overset{?}{\in} A \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ avec } a = 0$$

② $U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\quad V = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$\alpha \cdot U + \beta \cdot V$ est diagonale pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & 0 \\ 0 & \alpha a + \beta b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

avec $c = \alpha a + \beta b \in \mathbb{R}$

c) $\mathbb{R}[t] = \{ p \mid p$ est un polynôme en $t \}$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$$= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

$$p = (a_0 ; a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n ; 0 ; 0 ; 0 ; \dots)$$

$\deg(p) = 2 \qquad p(t) = a_0 + a_1 t + \underbrace{a_2}_{\neq 0} t^2$

polynôme nul : $\quad 0 + 0 \cdot t + 0 t^2 = 0$

$\boxed{1.2.10}$

① $(0; 0; 0; 0) \in A$ car $0 = 2 \cdot 0 + 0$ et $0 = 5 \cdot 0$

② Soit $\overbrace{(x_1; y_1; z_1; t_1)}^{u} \in A$ :

et $\underbrace{(x_2; y_2; z_2; t_2)}_{v} \in A$ :

$x_1 = 2y_1 + z_1$

$t_1 = 5x_1$

$x_2 = 2y_2 + z_2$

$t_2 = 5x_2$

$$\underbrace{a \cdot u + b \cdot v}_{w} = (a x_1 + b x_2 ; a y_1 + b y_2 ; a z_1 + b z_2 ; a t_1 + b t_2)$$

On voit que $w \in A$ car :

$$\begin{aligned} 2(a y_1 + b y_2) + a z_1 + b z_2 &= a\, 2 y_1 + b\, 2 y_2 + a z_1 + b z_2 \\ &= a(2y_1 + z_1) + b(2y_2 + z_2) \\ &= a x_1 + b x_2 \checkmark \end{aligned}$$

$$S(ax_1 + bx_2) = aSx_1 + bSx_2$$

$$= at_1 + bt_2 \quad ✓$$

$\boxed{1.2.19}$ $\{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Base: $\boxed{1, x, x^2}$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}$$

$$(2-x;\ 1+2x;\ 1-x^2)$$

$$\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \mathcal{B}'$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = -1\cdot(4+1) = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ $(2-x\,;\,1+2x\,;\,1-x^2)$ est une base de $P_2$

$$\boxed{x^2 = a(2-x) + b(1+2x) + c(1-x^2)}$$

$$x^2 = \cancel{2a} - \cancel{ax} + \cancel{b} + \cancel{2bx} + \cancel{c} - \cancel{cx^2}$$

$$= \boxed{2a+b+c} + \boxed{(2b-a)}x \boxed{-c}x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} -c = 1 \\ 2a+b+c = 0 \\ 2b-a = 0 \end{array}}$$

$4b + b + 1 = 0 \qquad 5b = +1 \qquad b = +1/5$

$a = 2b \qquad a = +2/5$

Les composantes de $x^2$ sont $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(2x-1)^2 = \boxed{4x^2 - 4x + 1}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = a\underbrace{(2-x)}_{e_1} + b\underbrace{(1+2x)}_{e_2} + c\underbrace{(1-x^2)}_{e_3}$$

$$4x^2-4x+1 = (2a+b+c) + (2b-a)x - cx^2$$

$$\begin{cases} -c = 4 \\ 2b-a = -4 \\ 2a+b+c = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &c=-4 \\ &a = 2b+4 \\ &2a+b-4=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &c=-4 \\ &a = 14/5 \\ &4b+8+b-4=1 \\ &5b=-3 \\ &b=-3/5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4x^2-4x+1 \to \begin{pmatrix} 14/5 \\ -3/5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1.2.28}$ $\qquad 1, x, x^2, x^3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -10 \\ 4 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -10 \\ 0 & 26 & 36 \\ 0 & 15 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -10 \\ 0 & 13 & 18 \\ 0 & 15 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -10 \\ 0 & 13 & 18 \\ 0 & 1 & 22/15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & 22/15 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ On a 3 vecteurs lin. indép. dans la matrice échelonnée.

$\Rightarrow$ Les 3 vecteurs de départ sont lin. indép.

Le sous-espace est de dimension 3.