Algèbre linéaire

1.2.6 / 1.2.8 / 1.2.10 / 1.2.19 / 1.2.28

« Aspects théoriques »

Esp. vect.

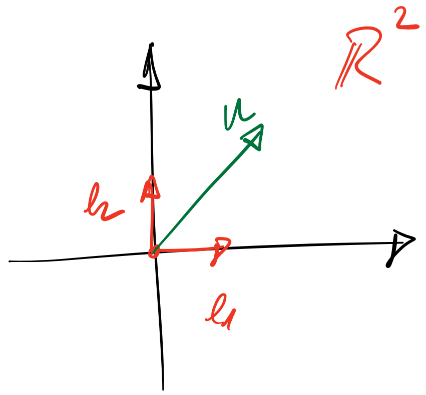
Base / dimension (nbre de vecteurs de la base)

indép. lin.

famille génératrice

Image / Noyau ← Application lin.

Changement de bases

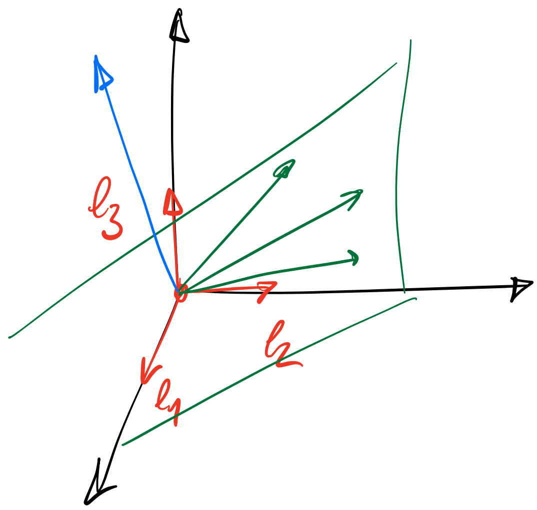


$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ $\qquad$ $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\mathcal{B}' = (e_2, e_1)$

e_1, e_2 famille libre / lin. indép.

e_1, e_2 génératrice : $\quad u = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$



$h : U \to V$ linéaire

$\ker(h) = \{ u \in U \mid h(u) = 0 \}$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\ker(h) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker(h) = \{0\}$

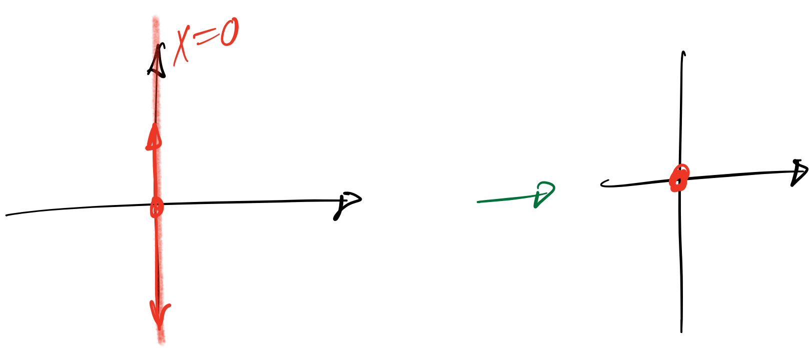
$x = 0$

$\overset{0}{2x} + y = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H' : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\ker(h')$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\boxed{x = 0}$



$1 \cdot x + 0y + 0 = 0$ droite

$\ker(h')$ est la droite $x = 0$

$\{(0; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + k\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + k \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{h(e_1)\quad h(e_2)\quad h(e_3)}_{\text{extraire une sous-famille libre ?}}$$

$$Im(h) = Im(H)$$

$$H \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \boxed{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(h) = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{plan}$$

$$\dim(\operatorname{Im}(h)) = 2$$

$$\underbrace{\dim(\ker(h)) = 1}_{3} \leftarrow \text{ker } h \text{ est une droite}$$

thm du rang: $\underbrace{\dim \operatorname{Im} + \dim \ker}_{\text{dim esp. dép.}}$

ker(h)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

éq. param. de ker(h)

$$\begin{aligned} x &= -3y - 7z \\ y &= -2z \\ z &= z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -z \\ y &= -2z \\ z &= z \end{aligned} \qquad \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$