Calcul matriciel

« Suite des vecteurs »

matrices

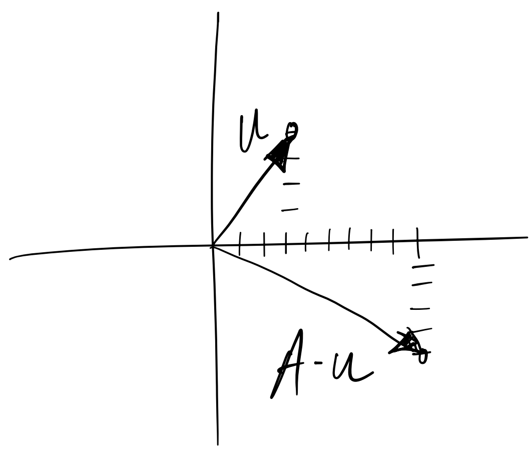
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Multiplication

$1 \cdot 3$
$+ 2 \cdot 4$

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ -3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$ ← quatre cases

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ -3\cdot 2 + 1\cdot 1 & -3(-1) + 1\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4.2.1}$

a) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 2\cdot 1 & 3\cdot 4 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 4\cdot 1 & 1\cdot 4 + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 3 & 1\cdot 0 + (-2)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 2\cdot 3 & (-1)0 + 2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3-3 \\ 4-3 & 6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Question :} \quad A \cdot B \overset{?}{=} B \cdot A}$

<u>Exemple:</u> 4.2.1 d) $A \cdot B = \boxed{\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}}$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & (-3)(-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Somme de matrices}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-2) & 2 + (-1) \\ 3 + (-5) & 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4.2.2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B+C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

On a, dans ce cas : $A \cdot (B+C) = AB + AC$

Le produit se distribue sur la somme.

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un nombre

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot D = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-3) & 3\cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2AB = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -12 & 10 \end{pmatrix}$$

et $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

On voit que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
L'identité remarquable est fausse pour les matrices.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = C \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \cdot C$$

En effet, le résultat est vrai pour $n = 1$.

Par récurrence sur n :

$$C^{n+1} = C \cdot C^n \overset{\text{hyp. de réc.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1}+2^{n-1} & -2^{n-1}-2^{n-1} \\ -2^{n-1}-2^{n-1} & 2^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{n-1} & -2 \cdot 2^{n-1} \\ -2 \cdot 2^{n-1} & 2 \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

CQFD

$$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^0\cdot C$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot C$$

$$= 2^1\cdot C$$

$$C^3 = C\cdot C^2 = C\cdot(2\cdot C) = 2\cdot(C\cdot C) = 2\cdot C^2$$

$$= 2\cdot(2\cdot C) = 4\cdot C = 2^2\cdot C$$

$$C^4 = C^2\cdot C^2 = (2\cdot C)\cdot(2\cdot C) = (2\cdot 2)\cdot C^2$$

$$= (2\cdot 2\cdot 2)\cdot C = 8C = 2^3\cdot C$$

-1

$$C^5 = 16\cdot C = 2^4\cdot C$$

-1

$$C^6 = 32C = 2^5\cdot C$$

$\boxed{4.2.3}$

On peut écrire $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & -x+y \\ z+t & -z+t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z = x+y \\ y-t = -x+y \\ x+z = z+t \\ y+t = -z+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = t \\ x = t \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -z \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} t & -z \\ z & t \end{pmatrix}$$