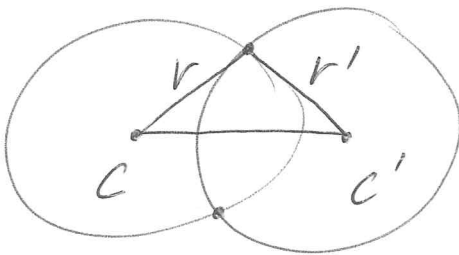
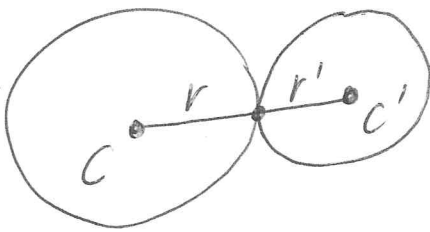


3.4

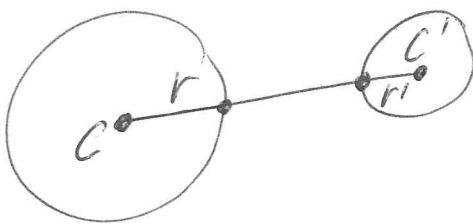
Il s'agit de déterminer si les cercles sont sécants, tangents ou disjoints:



$$\|\vec{CC'}\| < r + r'$$



$$\|\vec{CC'}\| = r + r'$$



$$\|\vec{CC'}\| > r + r'$$

On doit donc trouver les coordonnées des deux centres et calculer la distance qui les sépare. On pourra ensuite comparer avec la somme des rayons.

3.4₂

23MS

$$x^2 - 16x + y^2 - 20y = -115$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 10 + 10^2 = -115 + 8^2 + 10^2$$

$$\Leftrightarrow (x-8)^2 + (y-10)^2 = 49$$

$$C(8; 10) \quad r = 7$$

$$x^2 + 8x + y^2 - 10y = -5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2 = -5 + 4^2 + 5^2$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-5)^2 = 36$$

$$C'(-4; 5) \quad r' = 6$$

3.4

23 MS

$$\vec{CC'} = \begin{pmatrix} -4-8 \\ 5-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\vec{CC'}\| &= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } r + r' = 7 + 6 = 13.$$

Donc $\|\vec{CC'}\| = r + r' = 13$, les deux cercles sont tangents.

3.5

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 17$$

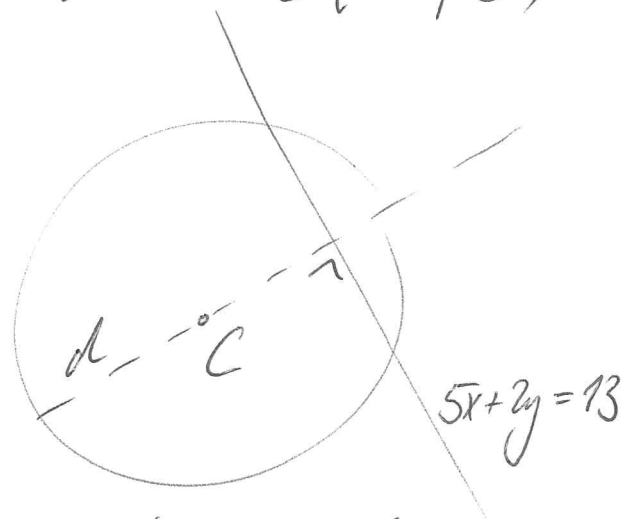
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 6y = 17$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = 17 + 2^2 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 30$$

Le centre du cercle est donc $C(-2; 3)$
et son rayon vaut $\sqrt{30}$.

Croquis de la situation:



On cherche l'équation,

de d qui passe par C et qui est
perpendiculaire à $5x + 2y = 13$

On sait que d est de la forme

$$2x - 5y + k = 0$$

$\boxed{3.5}_2$

23MS

Vu que d passe par C , on peut écrire :

$$2(-2) - 5(3) + k = 0$$

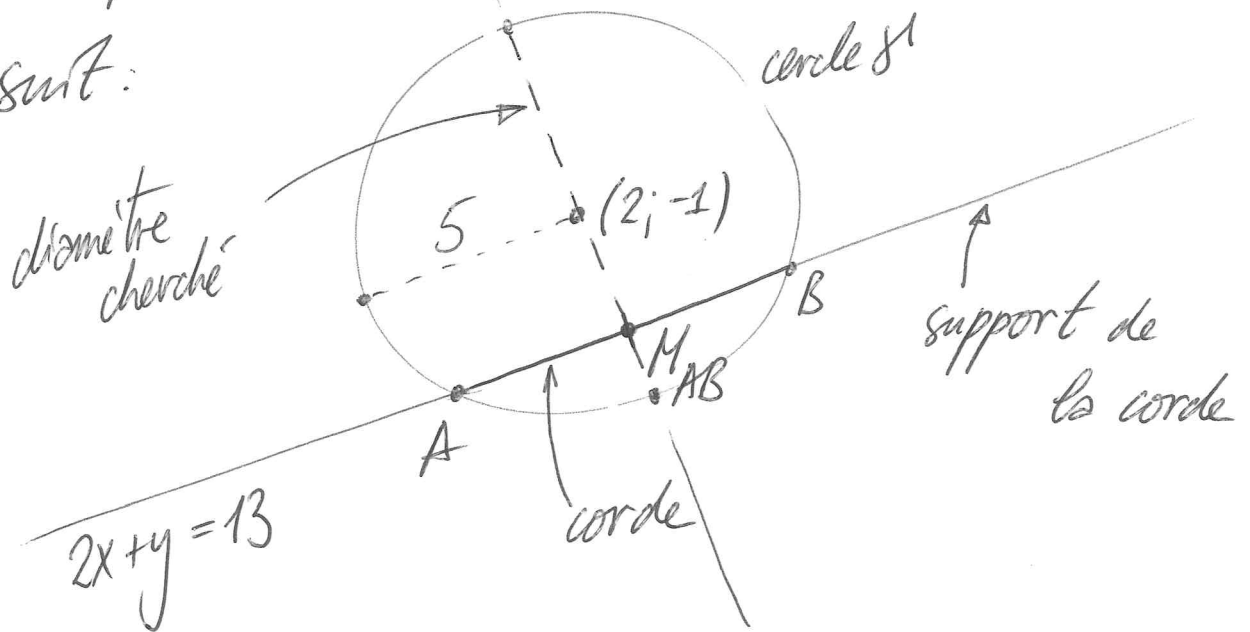
$$\Rightarrow k = 19$$

L'équation cherchée est donc :

$$2x - 5y + 19 = 0$$

3.7

On peut schématiser la situation comme suit :



Le diamètre cherché passe par M_{AB} et par le point $(2; -1)$. Pour calculer M_{AB} , il nous faut les points A et B qui s'obtiennent en résolvant le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow y = 13 - 2x$$

3.7

23MS

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + (13 - 2x + 1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + (14 - 2x)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + 196 - 56x + \cancel{4x^2} = 25$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 60x + 200 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 60x + 175 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 7)(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow A(7; -1) \quad B(5; 3)$$

$$M_{AB} = (6; 1) \quad \overrightarrow{CM_{AB}} = (4; 2)$$

3.7

23 MS

Le vecteur $(4; 2)$ est donc un vecteur directeur de la droite support du diamètre qui passe par M_{AB} .

L'équation de cette droite s'écrit donc :

$$2x - 4y + k = 0$$

Vu qu'elle passe par $(2; -1)$, on a :

$$2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

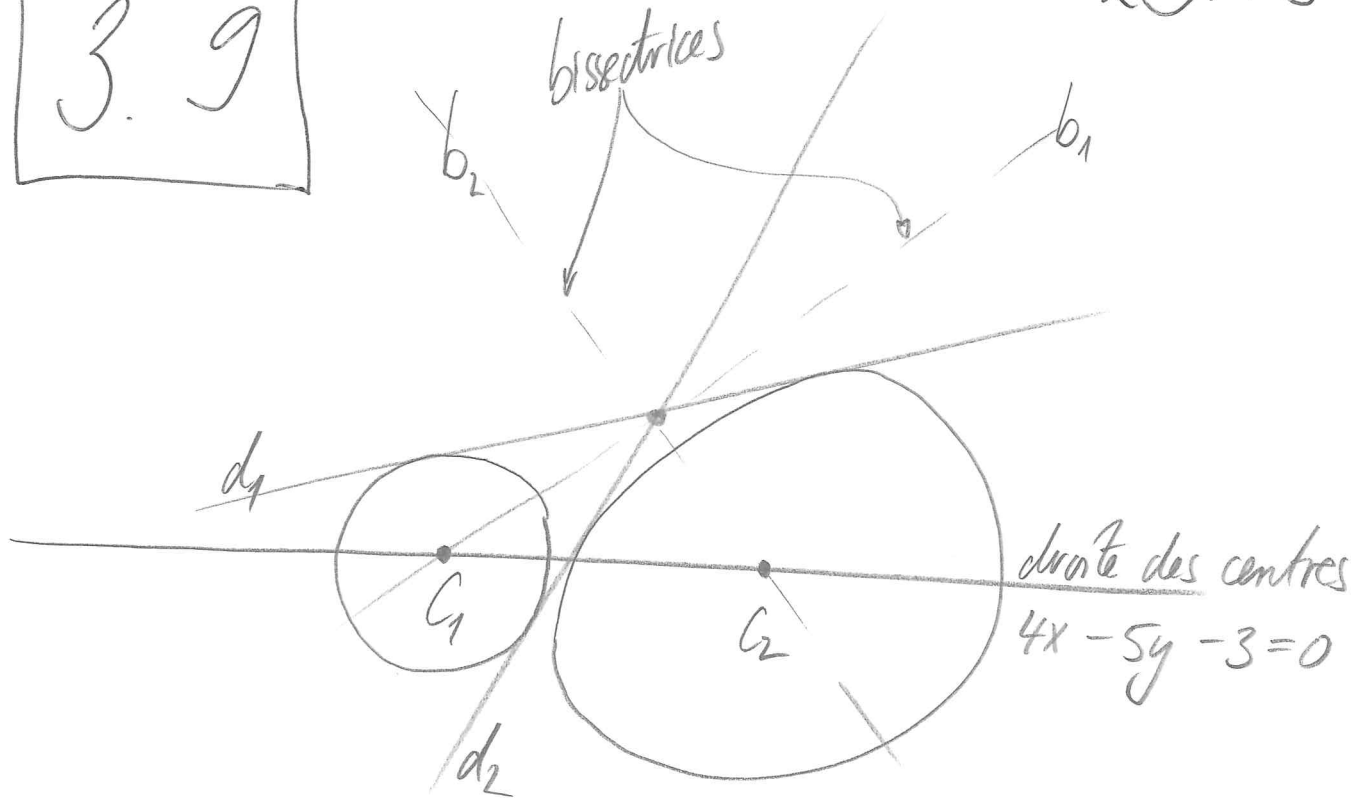
$\Rightarrow$ L'équation cherchée est :

$$2x - 4y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$$

N.B. On aurait pu calculer la perpendiculaire à d par $(2; -1)$ qui nous aurait donné la solution directement.

3.9



$$d_1: 2x - 3y - 10 = 0 \quad d_2: 3x - 2y + 5 = 0$$

Les centres des cercles tangents à une paire de droites se trouvent sur les bissectrices de ces deux droites (voir schéma ci-dessus).

On doit donc calculer l'équation de b_1 ainsi que celle de b_2 .

3.9

23 MS

On procède comme suit :

$$\frac{2x - 3y - 10}{\sqrt{4+9}} = \frac{\pm(3x - 2y + 5)}{\sqrt{4+9}} \quad \downarrow \cdot \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y - 10 = \pm(3x - 2y + 5)$$

$$(1) \quad 2x - 3y - 10 = 3x - 2y + 5$$

$$\boxed{x + y + 15 = 0} \quad \text{--- } b_1$$

$$(2) \quad 2x - 3y - 10 = -3x + 2y - 5$$

$$5x - 5y - 5 = 0$$

$$\boxed{x - y - 1 = 0} \quad \text{--- } b_2$$

3.9

23MS

On détermine maintenant les intersections des bissectrices avec la droite des centres.

$$\begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0 \\ x + y + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 60 = 0 \end{cases}$$

$$9y = -63; y = -7 \Rightarrow C_1(-8; -7)$$

$$x = 7 - 15; x = -8$$

$$\begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0 \\ 4x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$y = 1; x = 2$$

$$\Rightarrow C_2(2; 1)$$

3.9

23MS

Il ne nous manque que les rayons, que l'on obtient à l'aide de la formule de la distance d'un point à une droite:

$$r_1 = \text{dist.}(C_1; d_1) = \frac{|2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-7) - 10|}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{|-16 + 21 - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

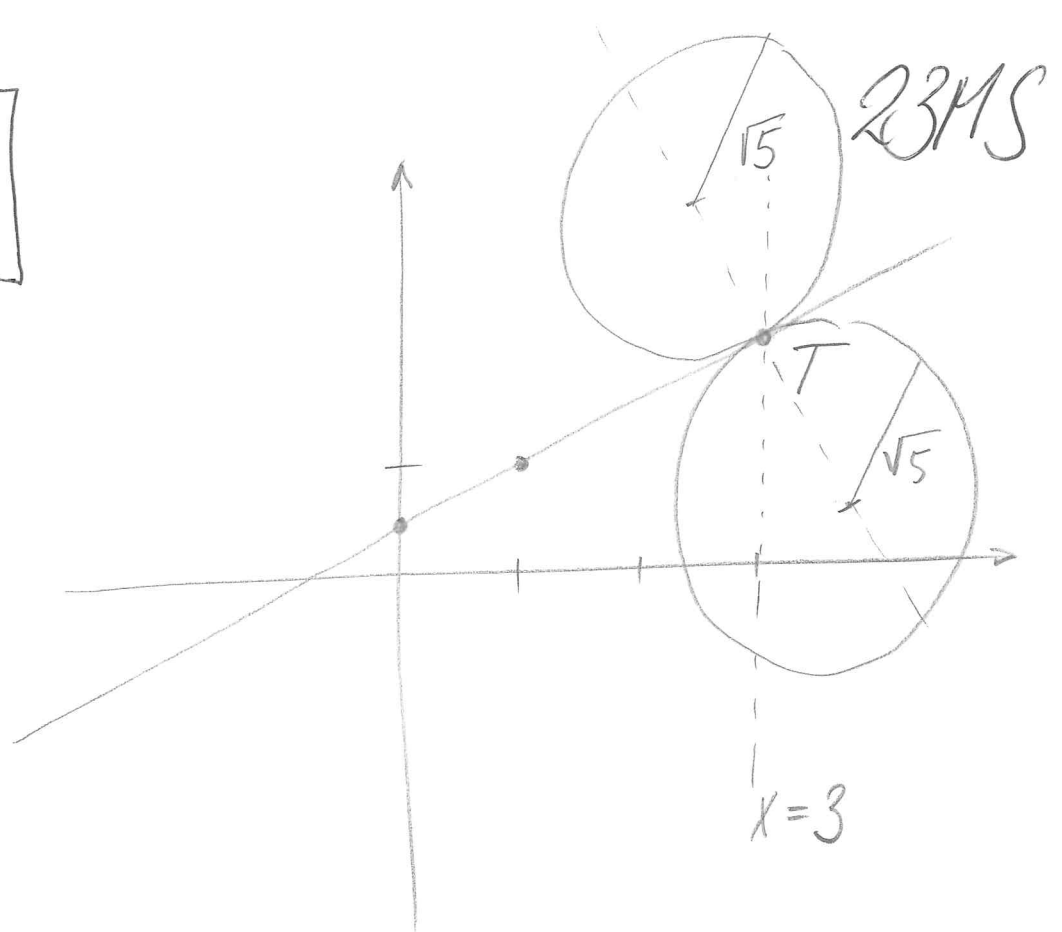
$$r_2 = \text{dist.}(C_2; d_1) = \frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{|4 - 3 - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

Les équations cherchées sont donc:

$$(x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13} \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}$$

3.11



On commence par déterminer le point de tangence T :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 3 - 2y &= 1 \\ 2y &= 2; y = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(3; 1)$$

On trouve ensuite l'équation de la perpendiculaire à $x - 2y - 1 = 0$ passant par T .

3.11

23MS

$$2x + y + k = 0 \quad \text{par } T(3; 1)$$

$$\Rightarrow 6 + 1 + k = 0; \quad k = -7$$

$$\Rightarrow d_1: 2x + y - 7 = 0$$

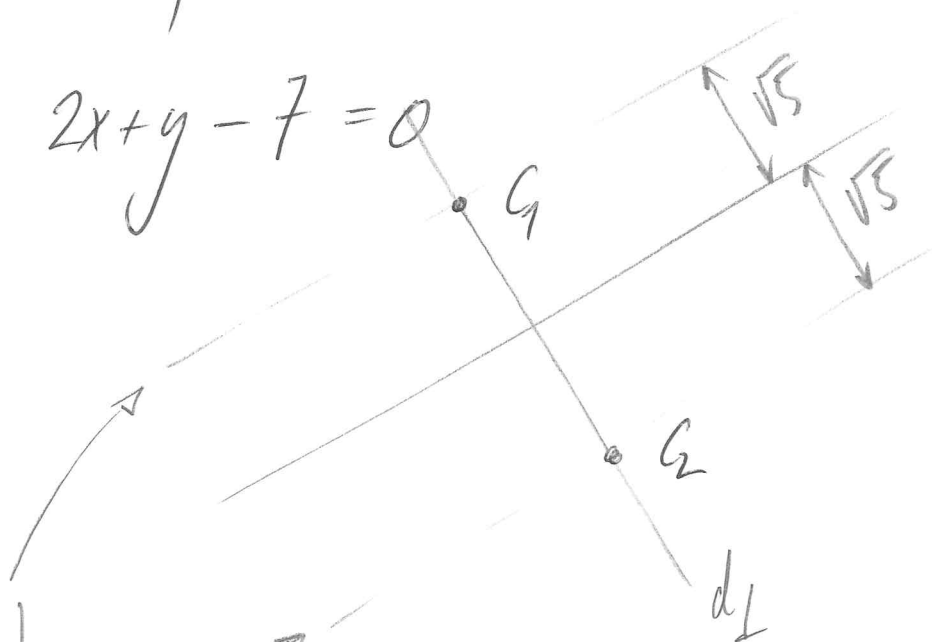
$$\frac{\pm(x - 2y - 1)}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \pm(x - 2y - 1) = 5$$

Les équations des droites parallèles

à $x - 2y - 1$ à distance $\sqrt{5}$ sont donc :

$$x - 2y - 6 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 2y - 4 = 0$$



3.11

23MS

On calcule les intersections de ces deux droites avec d_1 :

$$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4y - 12 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5y + 5 = 0; \quad y = -1 \quad \Rightarrow G_2(4; -1)$$

$$\Rightarrow 2x - 8 = 0; \quad x = 4$$

$$\begin{cases} -x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 4y - 8 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5y - 15 = 0; \quad y = 3 \quad \Rightarrow G_1(2; 3)$$

$$\Rightarrow 2x - 4 = 0; \quad x = 2$$

3.11

23 MS

Les équations cherchées sont donc :

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$