

1.1.6

3MS

a) Vu que $ED(\ln) =]0; +\infty[$,

il faut que ce qui « est à l'intérieur »
soit strictement positif.

On peut donc écrire :

$$\ln(5x) \text{ existe} \Leftrightarrow 5x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R}^* = ED(\ln)$$

$$(\ln(5x))' = \frac{1}{5x} \cdot (5x)' = \frac{1}{5x} \cdot 5 \cdot (x)'$$

$$(\ln(u))' = \frac{1}{u} \cdot u' \qquad = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

1.1.6₂

3MS

$$b) f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{ED}_f =]1; +\infty[$$

$$f'(x) = (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1} \cdot \overbrace{(x-1)'}^1 = \frac{1}{x-1}$$

$$c) f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow 1-x > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > x \Leftrightarrow x < 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{ED}_f =]-\infty; 1[$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' = \frac{1}{1-x} \cdot (-1) \\ &= -\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

1.1.6

3MS

$$d) \ln(|1-x|) \text{ existe} \Leftrightarrow |1-x| > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Vu que } (\ln(|x|))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

on peut écrire:

$$(\ln(|1-x|))' = \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)'$$

$$= \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1} \quad \forall x \neq 1$$

$$\text{On a donc } f'(x) = \frac{1}{x-1}$$

1.1.6

3MS

e) Pour savoir si $x^2 - x > 0$, on doit déterminer le signe de $x^2 - x$: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$$\begin{array}{c} 0 \qquad 1 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{ED}_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$$

$$f'(x) = (\ln(x^2 - x))' = \frac{1}{x^2 - x} \cdot (x^2 - x)'$$

$$= \frac{1}{x^2 - x} \cdot (2x - 1) = \frac{2x - 1}{x(x - 1)}$$

f) Vu que $x^2 - x = -(x - x^2)$, on peut écrire

$$\text{ED}_f =]0; 1[$$

$$f'(x) = (\ln(x - x^2))' = \frac{1}{x - x^2} \cdot (x - x^2)'$$

$$= \frac{1 - 2x}{x(1 - x)} = \frac{2x - 1}{x(x - 1)}$$

On multiplie par $\frac{-1}{-1} = 1$

1.1.6

5

3MS

$$g) |x^2 - x| > 0 \Leftrightarrow x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$$

$$\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$\text{Vu que } [\ln(|g(x)|)]' = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ pour}$$

toute fonction g , pour tout x tq. $g(x) \neq 0$,

on peut écrire :

$$(\ln(|x^2 - x|))' = \frac{(x^2 - x)'}{x^2 - x} = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

1.1.6

3MS

b) On détermine le signe de $\frac{x^2}{1-x}$:

La fonction x^2 est positive ou nulle pour $x=0$.

On a $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$. On en déduit que

$\frac{0}{+} \quad \frac{1}{+} \quad \frac{1}{-}$ est le signe de $\frac{x^2}{1-x}$.

$$\Rightarrow \text{ED}_f =]-\infty; 1[\setminus \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{1-x}} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{x^2} \cdot \frac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(1-x)}}{x^2} \cdot \frac{2x - 2x^2 + x^2}{\cancel{(1-x)} \cdot (1-x)} = \frac{2x - x^2}{x^2 \cdot (1-x)}$$

$$= \frac{\cancel{x} \cdot (2-x)}{\cancel{x} \cdot x \cdot (1-x)} = \frac{2-x}{x(1-x)}$$

1.1.6

3MS

i) Il faut que $3-x^2 > 0$. Or, $3-x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}. \text{ Vu la forme}$$

de la parabole $3-x^2$, on a $3-x^2 > 0$

$$\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_f =]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$$

$$f'(x) = [\ln(\sqrt{3-x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot (\sqrt{3-x^2})'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (3-x^2)'$$

$$= \frac{1}{2(3-x^2)} \cdot (-2x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}(3-x^2)} = \frac{-x}{3-x^2}$$

1.1.6₈

3MS

j) $ED_f =]0; +\infty[$, car $3x^5 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3x^5} \cdot (3x^5)' = \frac{1}{\cancel{3}x^5} \cdot \cancel{3} \cdot 5x^4 \\ &= \frac{5x^4}{x^5} = \frac{5}{x} \end{aligned}$$

k) $ED_f = ED(\ln) = \mathbb{R}_+^*$, car la fonction est construite à l'aide d'un $\ln$, de la fonction x , d'une multiplication et d'une soustraction.

$$f'(x) = (x \cdot \ln(x) - x)' = (x \cdot \ln(x))' - (x)'$$

$$\stackrel{\nearrow}{=} (x)' \ln(x) + x \cdot (\ln(x))' - 1$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1$$

$$= \ln(x)$$

1.1.6

3MS

$$e) |\cos(x)| > 0 \Leftrightarrow \cos(x) \neq 0$$

$$\text{Or, } \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z}$$

La fonction f est donc définie partout,
sauf sur ces deux ensembles de points.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln(|\cos(x)|)]' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (\cos(x))' \\ &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \end{aligned}$$

1.1.6

3MS

m) f est définie si $x \in]0; +\infty[$

et si $\ln(x) \neq 0$. Vu que $\ln(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = e^0 = 1, \quad \text{ED}_f =]0; +\infty[\setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)} \right)' = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

1.1.6

11

BMS

n) On doit exclure les nombres négatifs ou nuls, et les solutions des équations: $x=0$ et $\ln(x)=0$.

On a donc $ED_f = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, comme à la question m).

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = - \frac{(x \ln(x))'}{x^2 \ln^2(x)} = - \frac{\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}}{x^2 \ln^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = - \frac{u'}{u^2}$$

$$= - \frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)}$$