

1.1.1

$$a) \left. \begin{array}{l} ED(e^x) = \mathbb{R} \\ ED(5x) = \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow ED(e^{5x}) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{5x})' = e^{5x} \cdot (5x)' = e^{5x} \cdot 5 \cdot (x)' \\ &= e^{5x} \cdot 5 \cdot 1 = \underline{\underline{5e^{5x}}} \end{aligned}$$

b) L'exponentielle ne pose pas de problème, son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

$$ED(x^2) = \mathbb{R} \Rightarrow ED(e^{x^2}) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x \\ &= \underline{\underline{2x \cdot e^{x^2}}} \end{aligned}$$

1. 1. 1

3MS

c) Si $x=0$, $\frac{1}{x}$ n'est pas défini.

Autrement dit, $ED(\frac{1}{x}) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

Donc, $ED(e^{\frac{1}{x}}) = \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Notif de dérivation

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

1.1.1

3MS

d) $\sqrt{x^2+x}$ est définie si et seulement si $x^2+x \geq 0$. On doit donc déterminer le signe de x^2+x

$$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=-1 \end{matrix}$$

x		-1		0	
		$ $		$ $	
$x(x+1)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$

$$\Rightarrow x^2+x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$$

$$\Rightarrow \text{ED}(e^{\sqrt{x^2+x}}) =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\sqrt{x^2+x}})' = e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot (\sqrt{x^2+x})' \\ &= e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot (x^2+x)' \end{aligned}$$

1.1.4

3MS

$$= e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot (2x+1)$$

On doit utiliser ici deux fois le

« motif de la dérivée interne » :

une première fois pour la fonction $\sqrt{x^2+x}$ qui est à l'intérieur de $e^{(\quad)}$ et

une autre fois pour la fonction x^2+x

qui est à l'intérieur de la $\sqrt{\quad}$.

1. 1. 1

3MS

e) $\sqrt[5]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ existe uniquement

si $\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0$. R fait donc

étudier le signe de cette fonction

$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{(1+x)(1-x)}$ ← très positif!
 $x = \pm 1$ est à exclure

x	-1	1
$\frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}$	-	+

$\Rightarrow ED\left(\sqrt[5]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) =]-1; 1[$

$\Rightarrow ED\left(\exp\left(\sqrt[5]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)\right) =]-1; 1[$

1. 1. 1

3MS

6

$$\exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)'$$

$$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'$$

on calcule ceci à part

$$\text{MOTIF: } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{(1+x^2)'(1-x^2) - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} =$$

$$\frac{2x(1-x^2) - (1+x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$\frac{2x(1-x^2) + 2x \cdot (1+x^2)}{(1-x^2)^2} =$$

$$\frac{2x(1-x^2+1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

1.1.1

3MS

$$\Rightarrow f'(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \frac{\cancel{2x}}{(1-x^2)^2}$$

$$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$$

$$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3 \cdot (1+x^2)}}$$

On peut simplifier ça...

1. 1. 1

3MS

$$f) \quad ED(\sin(x)) = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ED(e^{\sin(x)}) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin(x)} \cdot (\sin(x))' \\ &= e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin(x)} \cdot (\sin(x))' \\ &= e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{cf. tables} \\ \text{de} \\ \text{dérivation} \end{array}$$

$$g) \quad ED(x^2 \cdot e^x) = \mathbb{R} \quad (\text{polynôme} \cdot \text{exp})$$

$$(x^2 \cdot e^x)' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\begin{aligned} &= 2xe^x + x^2 e^x = e^x (2x + x^2) \\ &= (x^2 + 2x) e^x \end{aligned}$$

1. 1. 1

3MS

$$h) \left. \begin{array}{l} ED(-x) = \mathbb{R} \\ ED(\cos x) = \mathbb{R} \\ ED(e^x) = \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow ED(f) = \mathbb{R}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = (e^{-x} \cdot \cos x)' \stackrel{\downarrow}{=} (e^{-x})' \cos x + e^{-x} (\cos x)'$$

D'après les tables, $(\cos x)' = -\sin x$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x} \cdot \underbrace{(-x)'}_{-1} \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x)$$

$$= -\cos x \cdot e^{-x} - \sin x \cdot e^{-x} = \underline{\underline{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}}$$