Exercice 1.2.11 d)

d) $\underline{n=1 :}$ $\quad x_1 \cdot \dfrac{1}{x_1} = 1 \geqslant 1^2$

La propriété est vraie pour $n=1$.

Supposons que la propriété soit vraie pour n et montrons qu'elle l'est pour $n+1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \frac{1}{x_n}$$

$$+ x_n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) + 1 \geqslant$$

$$(*) \quad n^2 + \frac{x_1}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} + \frac{x_2}{x_n} + \frac{x_n}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_n} + \frac{x_n}{x_n}$$

$$+ 1$$

Exo 16 $_2$

205

d) Observons que, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2+y^2-2xy+2xy}{xy}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{xy} + 2 \geqslant 2$$

Or, $(*)$ s'écrit

$$n^2 + \frac{x_1^2+x_n^2}{x_1x_n} + \frac{x_2^2+x_n^2}{x_2x_n} + \dots + \frac{x_{n-1}^2+x_n^2}{x_{n-1}x_n}$$

$$+ 2 + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2 + \underbrace{2 + \dots + 2}_{n \text{ fois}} + 1$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

CQFD