Exercice 1.2.11 a)

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx \qquad x \geq 0$

① $n=0$, $1+x \geq 1 \Rightarrow (1+x)^0 = 1 \geq 1+0$ ✓

② Supposons que $(1+x)^n \geq 1+nx$ est montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 =$$

$$1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x .$$

Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Donc si $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie, alors $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ est aussi vraie

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.