Par des calculs directs, on voit que, pour $n = 1, \dots, 10$: $x_n = \frac{n}{n+1}$

Démontrons, par récurrence sur n, que $x_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{n=1}$ $x_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

Supposons l'assertion vraie pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} = x_n$$

et écrivons :

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{n}{n+1} = x_n} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Et donc, $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$, ce qui démontre le résultat cherché.