$\underline{\text{Prop.}}$ $\boxed{\frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{1}{3}n}$ $P(n)$ est pair pour $n \in \mathbb{N}$.

$\underline{\text{preuve (réc. sur}}$ n)

$\boxed{n=0}$ $\quad \frac{2}{3}0^3 + 0^2 + \frac{1}{3}0 = 0$ ✓

$\boxed{n\checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$ hyp. de réc. $\boxed{\frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{1}{3}n = 2\cdot k \quad k \in \mathbb{N}}$

$$\frac{2}{3}(n+1)^3 + (n+1)^2 + \frac{1}{3}(n+1) =$$

$$\frac{2}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} =$$

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{1}{3}n}_{2k} + 2n^2 + 2n + \frac{2}{3} + 2n + 1 + \frac{1}{3} =$$

$$2k + 2n^2 + 2n + 2n + 1 + 1 = 2k + 2(n^2 + 2n + 1)$$

$$= 2\cdot m$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

$P(n) = 2k \Rightarrow P(n+1) = 2m$

CQFD