

Soit  $u, v \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$a) h(\alpha u + \beta v) \stackrel{\text{def}}{=} 3 \cdot (\alpha u + \beta v)$$

$$\stackrel{\text{axiome}}{=} 3 \cdot (\alpha u) + 3 \cdot (\beta v)$$

$$\stackrel{\mathbb{R}}{=} (3\alpha)u + (3\beta)v$$

$$\stackrel{\mathbb{R} \text{ et axiome}}{=} \alpha \cdot (3u) + \beta \cdot (3v)$$

$$= \alpha \cdot h(u) + \beta \cdot h(v)$$

$\Rightarrow h$  est linéaire.

$$b) u = xe_1 + ye_2 \quad v = x'e_1 + y'e_2$$

$$\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x')e_1 + (\alpha y + \beta y')e_2$$

$$\begin{aligned} h(\alpha u + \beta v) &= \alpha u + \beta v + (\alpha x + \beta x' - (\alpha y + \beta y'))e_2 \\ &= \alpha u + \beta v + (\alpha(x-y) + \beta(x'-y'))e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha u + \alpha(x-y)l_2 + \beta v + \beta(x'-y')l_2 \\ &= \alpha(u + (x-y)l_2) + \beta(v + (x'-y')l_2) \\ &= \alpha h(u) + \beta h(v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow h$  est linéaire.

c) On sait que si  $h$  est linéaire, alors

$$h(0) = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe,

$$\begin{aligned} h(0) &= h(0 \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 + 0 \cdot l_3) \\ &= 0 \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 + l_3 = l_3 \neq 0 \end{aligned}$$

L'application  $h$  n'est pas linéaire dans ce cas.

$$d) \quad h(x; y) = (y; -x)$$

$$\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y')$$

$$h(\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y') = (\alpha y + \beta y'; -(\alpha x + \beta x'))$$

$$= (\alpha y + \beta y'; -\alpha x - \beta x')$$

$$= (\alpha y; -\alpha x) + (\beta y'; -\beta x')$$

$$= \alpha (y; -x) + \beta (y'; -x')$$

$$= \alpha \cdot h(x; y) + \beta \cdot h(x'; y')$$

$\Rightarrow h$  est bien linéaire.