Soit $w \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $az^2+bz+c=0$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Posons $w = x+yi$

$aw^2+bw+c=0$

$\Leftrightarrow a(x^2+2xyi-y^2)$

$+b(x+yi)+c=0$

$\Leftrightarrow ax^2+2axyi-ay^2$

$+bx+byi+c=0$

$$\Leftrightarrow ax^2 - ay^2 + bx + c + (2axy + by)\cdot i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - ay^2 + bx + c = 0 \\ 2axy + by = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + ay^2 + bx + c = 0 \\ y(2ax + b) = 0 \end{cases}$$

Soit maintenant $\overline{w} = x - yi$

$a\overline{w}^2 + b\overline{w} + c = 0$

$\Leftrightarrow a(x-yi)^2 + b(x-yi) + c = 0$

$\Leftrightarrow a(x^2 - 2xyi - y^2)$
$+ bx - byi + c = 0$

$\Leftrightarrow ax^2 - 2axyi - ay^2$
$+ bx - byi + c = 0$

$\Leftrightarrow ax^2 - ay^2 + bx + c$
$- (2axy + by)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a x^2 - a y^2 + bx + c = 0 \\ -(2axy + by) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a x^2 - a y^2 + bx + c = 0 \\ -y(2ax + b) = 0 \end{cases}$$

En résumé :

$$a w^2 + b w + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a x^2 - a y^2 + b x + c = 0 \\ y(2ax + b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a x^2 - a y^2 + b x + c = 0 \\ -y(2ax + b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \overline{w}^2 + b \overline{w} + c = 0$$

Ainsi, w est solution

$\Leftrightarrow$ $\overline{w}$ l'est.