a) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

$\Leftrightarrow 8(x+yi) + 5(x-yi) = 4+3i$

$\Leftrightarrow 8x + 8yi + 5x - 5yi = 4+3i$

$\Leftrightarrow 13x + 3yi = 4 + 3i$

$\Leftrightarrow 13x = 4 \qquad 3y = 3$

$\Leftrightarrow x = 4/13 \qquad y = 1$

$\Leftrightarrow z = \frac{4}{13} + 1 \cdot i = \frac{4}{13} + i$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+yi)^2 + 2(x-yi) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2xyi + \underbrace{\cancel{y^2 i^2}}_{y^2 \cdot (-1) \,=\, -y^2} + \cancel{2x} - 2yi \cancel{+5} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + 5 + 2xyi - 2yi = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 2x + 5) + 2y(x-1)\cdot i = 0$$

$$A + Bi = 0 = 0 + 0i \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 5 = 0 \\ 2y(x-1) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{ssi}$$

$y = 0$
ou
$x = 1$

$\boxed{1^{er} \text{ cas : } y = 0}$

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \; / \; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

Cela ne donne pas de solution, vu que $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{2^{ème} \text{ cas : } x = 1}$

$$1 - y^2 + 2 + 5 = 0$$

$\Leftrightarrow 8 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 8$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{8}$

Finalement, les solutions sont

$$1 \pm \sqrt{8}\, i = 1 \pm \sqrt{4 \cdot 2} \cdot i$$

$$= 1 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \cdot i$$

$$= 1 \pm 2\sqrt{2} \cdot i$$

c) $\bar{z} + 1 = x - yi + 1 = (x+1) - yi$

$\Rightarrow \Im(\bar{z}+1) = \Im((x+1) - yi) = -y$

$-z + 2 = -x - yi + 2 = (2-x) - yi$

$\Rightarrow \Re(-z+2) = 2 - x$

$\Rightarrow 2\,\mathfrak{I}(\bar{z}+1) + 2i\,\mathfrak{R}(-z+2) =$

$$-2y + 2i(2-x) = 2y + 2(2-x)i$$

On peut poser l'équation et la résoudre:

$$-2y + 2(2-x)i = -1 - 12i$$

$$\Leftrightarrow \quad -2y = -1 \qquad 2(2-x) = -12$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1/2 \qquad x = 8$$

La solution est donc

$$8 + \frac{1}{2} \cdot i$$