$$
\begin{array}{cc}
 & 3 \\
3 & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}
\end{array}
= 1 \cdot \overset{2}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} \; 2 \qquad 1
$$

$$
-(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 11
$$

$3 \cdot 2$ multiplications

$$
+1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{20}} \qquad 8
$$

$M$ d'ordre $n$: $\boxed{n! \text{ multiplications}}$

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix}
= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20
$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

## Propriétés du déterminant.

Soit $M$ un matrice carrée.

(1) $\det M$ ne change pas si on ajoute à une ligne un multiple d'une autre.

(2) $\det M$ change de signe si on permute 2 lignes de $M$.

(3) Si $M'$ désigne une matrice obtenue en multipliant une ligne de $M$ par $k \in \mathbb{R}$, $\det(M') = k \cdot \det(M)$.

Le mot « ligne » peut être remplacé ci-dessus par le mot « colonne ».

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$1+4 \quad = \frac{1}{3}(3+12)$$

Soit $A$ une matrice carrée.

$$\boxed{A \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0}$$

<u>Exemple:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A$ n'est pas inversible car $\det(A) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Calculer } A^{-1} :}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L - 3L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} \cdot L_2$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{matrix}} \right)$$

$A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$