Proposition 1 : Soit $P(x)$ un polynôme. Soit $R(x)$ le reste de la division de $P(x)$ par $(x-a)$.

Alors :

1) $R(x) = R \in \mathbb{R}$ ($R(x)$ est un nombre)

2) $P(a) = R$

3) $P(a) = 0 \Leftrightarrow R = 0$

preuve: 1) On sait que $P(x) = (x-a) \cdot B(x) + R(x)$ et que $\deg(R(x)) < \deg(x-a) = 1$. Ce qui fait que $\deg(R(x)) = 0$ et que $R(x) = R \in \mathbb{R}$ est un nombre.

2) Vu que $P(x) = (x-a) \cdot B(x) + R$, on a

$$P(a) = (a-a) \cdot B(a) + R = 0 \cdot B(a) + R = 0 + R = R$$

$$\Rightarrow P(a) = R$$

3) Vu que $P(a) = R$ par le point 2),

$P(a) = 0 \Leftrightarrow R = 0$

CQFD

Proposition 2 : Soit

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

avec $a_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i \in \{0; 1; \dots; n\}$

On a alors

$$(X-a) \mid P(X) \Rightarrow a \mid a_0$$

preuve : On sait que $(X-a) \mid P(X)$

$\Rightarrow P(a) = 0$ d'après la proposition 1

$$\Rightarrow a_0 + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + \dots + a_n \cdot a^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = -a_1 a - a_2 a^2 - \dots - a_n a^n$$

$$\Rightarrow a_0 = a \cdot \underbrace{(-a_1 - a_2 a - \dots \cdot a_n a^{n-1})}_{= m \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow a_0 = a \cdot m \Rightarrow a \mid a_0$$

CQFD