

Nombres complexes sous forme trigonométrique

On note $[r; \theta]$ le nombre
complexe $z = r \cos \theta + r \sin \theta \cdot i$
avec $r, \theta \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

Proposition Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

On peut écrire $z = [r; \theta]$ et $z' = [r'; \theta']$.

On a alors:

$$a) \quad z \cdot z' = [r; \theta] \cdot [r'; \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$$

$$b) \quad \frac{z}{z'} = \frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta' \right]$$

$$c) \quad z^n = [r^n; n\theta] \quad \forall n \geq 1 \\ n \in \mathbb{N}$$

preuve

2MK

$$2) z \cdot z' = (r \cos \theta + r \sin \theta \cdot i)(r' \cos \theta' + r' \sin \theta' \cdot i)$$

$$= r (\cos \theta + \sin \theta \cdot i) \cdot r' \cdot (\cos \theta' + \sin \theta' \cdot i)$$

$$= rr' (\cos \theta + \sin \theta \cdot i)(\cos \theta' + \sin \theta' \cdot i)$$

$$= rr' \cdot (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cdot i^2 + \cos \theta \sin \theta' \cdot i + \sin \theta \cos \theta' \cdot i)$$

$$= rr' \cdot \left[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + (\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') \cdot i \right]$$

$$= rr' \cdot (\cos(\theta + \theta') + \sin(\theta + \theta') \cdot i)$$

$$= [rr'; \theta + \theta']$$



preuve

2MK

b) Rappel : $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
 $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{r(\cos \theta + \sin \theta \cdot i)}{r'(\cos \theta' + \sin \theta' \cdot i)} \\&= \frac{r}{r'} \cdot \left[\frac{(\cos \theta + \sin \theta \cdot i)(\cos \theta' - \sin \theta' \cdot i)}{\underbrace{(\cos \theta')^2 + (\sin \theta')^2}_1} \right] \\&= \frac{r}{r'} \cdot \left[(\cos \theta + \sin \theta \cdot i)(\cos(-\theta') + \sin(-\theta') \cdot i) \right] \\&= \frac{r}{r'} \cdot [1; \theta] \cdot [1; -\theta'] \\&= \frac{r}{r'} \cdot [1; \theta + (-\theta')] \\&= \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta' \right]\end{aligned}$$



preuve

2MK

c) Pr récurrence sur $n \geq 1$:

① Si $n=1$, il est clair que

$$z^1 = [r^1; 1 \cdot \theta]$$

② Supposons que $(P_n: z^n = [r^n; n\theta])$

soit vraie et montrons que

$$(P_{n+1}: z^{n+1} = [r^{n+1}; (n+1)\theta])$$

l'est aussi.

$$z^{n+1} = z^n \cdot z \stackrel{\text{Hypothèse de récurrence}}{=} [r^n; n\theta] \cdot [r; \theta]$$

Hypothèse de récurrence

Vu 2) $\rightarrow$

$$= [r^n r; n\theta + \theta] = [r^{n+1}; (n+1)\theta]$$

