Exponentielle

converge

$z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{z^0}{0!} + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Thm

$$\boxed{e^{z+w} = e^z \cdot e^w}$$

Thm:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i\varphi + i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$$

Not. $e^{i\varphi} = [1; \varphi]$

$$[1;\varphi] \cdot [1;\psi] = [1; \varphi+\psi]$$

Moivre

$$
\begin{tikzcd}
 & a+bi \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
{[r, \theta]} \arrow[rr, leftrightarrow] & & e^{x+iy}
\end{tikzcd}
$$

$r = e^x$

$\theta = y$

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Racine carrée de $z \in \mathbb{C}$

$z = a+bi \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Soit w une racine carrée de z, $w = x+yi$

$w = \sqrt{z} \Rightarrow w^2 = z$

$(x+yi)^2 = a+bi \Leftrightarrow (x^2-y^2) + 2xy \cdot i = a+bi$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x^2-y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}}$$

À résoudre
(a, b sont connus)

Truc supplémentaire: $|z| = |w^2| \overset{\text{prop. du 25/08}}{=} |w|^2$

$$\sqrt{a^2+b^2} = |w|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2$$

Le système à résoudre peut donc s'écrire:

$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \qquad 2xy = b$$
$$x^2-y^2 = a$$

⚠ ERRATUM

$\cancel{e^{zw} = (e^{z})^{w}}$ pour $z, w \in \mathbb{C}$ n'est pas bien définie

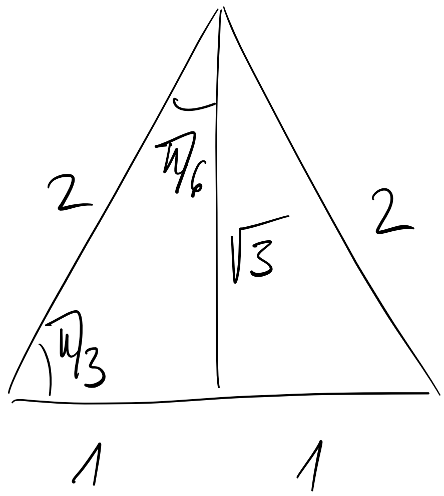
$$\boxed{\underline{\text{Par contre :}} \quad (e^{z})^{n} = e^{nz} \quad n \in \mathbb{Z} \ \checkmark}$$

$\log 16 + 2\log 3 - 2\log 2 - \frac{1}{2}\log 9$

$-(3+4)$

$5 + 2 - 3 - 4 = 0$

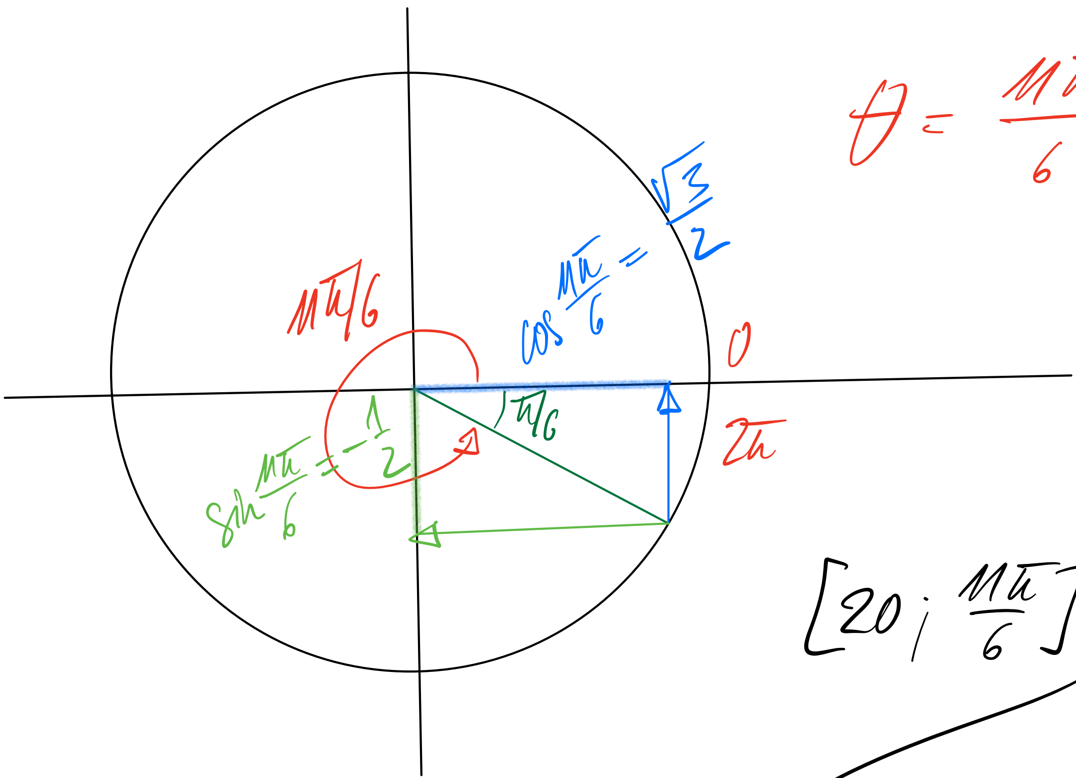
$7 + -7 = 0$



$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\theta = \frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\left[20 ; \frac{11\pi}{6}\right]$$

$$= 20\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$= 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 10\sqrt{3} - 10i$$

$$5 \cdot 5^{4x-7} - 120\, 5^{2x-3} = 625$$

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$\left(5^{2x-3}\right)^2 = 5^{2\cdot(2x-3)} = 5^{4x-6}$$

$$5 \cdot 5^{-1} \cdot 5^{4x-6} - 120\, 5^{2x-3} = 625$$

$t = 5^{2x-3}$ et $5^{4x-6} = t^2$

$$\Rightarrow \quad t^2 - 120t - 625 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t-125)(t+5) = 0$$

$$z^3 + 2z^2 + (-4+4i)z + 16 + 16i$$

Schéma de Horner:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & (-4+4i) & (16+16i) \\
\in \mathbb{R} \quad -4 & & -4 & 8 & -16-16i \\
\hline
 & 1 & -2 & 4+4i & 0
\end{array}$$