

1.1.18

$$\left(\sum a_i\right)^2 = \sum \sum a_i a_j$$

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3$$

	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1^2	a_1a_2	a_1a_3
a_2	a_2a_1	a_2^2	a_2a_3
a_3	a_3a_1	a_3a_2	a_3^2

$$a_1a_1 + a_1a_2 + a_1a_3 \quad a_1(\quad)$$

$$a_2a_1 + a_2a_2 + a_2a_3 \quad a_2(\quad)$$

$$a_3a_1 + a_3a_2 + a_3a_3 \quad a_3(\quad)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)$$

$$= a_1 \cdot \sum_{i=1}^n a_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i + \dots + a_n \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

$$= \sum_{i=1}^n a_1 a_i + \sum_{i=1}^n a_2 a_i + \dots + \sum_{i=1}^n a_n a_i$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j a_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j$$

CQFD

	a_1	a_2	...	a_n
a_1	$a_1 a_1$	$a_1 a_2$	...	$a_1 a_n$
a_2	$a_2 a_1$	$a_2 a_2$	...	$a_2 a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	$a_n a_1$	$a_n a_2$	...	$a_n a_n$

$$\sum_{j=1}^n a_1 a_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_2 a_j$$

$\vdots$

$$\sum_{j=1}^n a_n a_j$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j$$

$$P(n): 3 \mid n^3 - n \Leftrightarrow n^3 - n = 3k$$

$$0^3 - 0 = 0 \quad \text{at} \quad 0 = 3 \cdot 0 \quad \checkmark$$

$$1^3 - 1 = 0 \quad \text{at} \quad 0 = 3 \cdot 0 \quad \checkmark$$

$$2^3 - 2 = 6 \quad 6 = 3 \cdot 2 \quad \checkmark$$

$$3^3 - 3 \quad \checkmark$$

$$4^3 - 4 = 60 \quad 60 = 3 \cdot 20 \quad \checkmark$$

$$5^3 - 5 = 125 - 5 = 120 = 3 \cdot 40 \quad \checkmark$$

⋮

$$1\,365\,245\,872^3 - 1\,365\,245\,872 = 3 \cdot k$$

⋮

J'ai vérifié $P(0)$ (auvergne de la récurrence).

Je suppose que $P(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$

et je montre que $P(n)$ est vraie pour $n+1$

0
⋮
n
n+1

implication logique?

En résumé: $P(n) \checkmark \Rightarrow P(n+1) \checkmark$

Hypothèse de récurrence: $3 \mid n^3 - n \Leftrightarrow n^3 - n = 3k$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

$$= \underbrace{n^3 - n} + 3(n^2 + n)$$

$$= 3k + 3l = 3 \cdot m$$

Hyp de réc

$\Rightarrow 3 \mid (n+1)^3 - (n+1)$ CQFD

1.1.17

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i^2 - 2x_i m + m^2)$$

$$= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \frac{2}{n} \sum x_i m + \frac{1}{n} \sum m^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - 2m \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum x_i}_m + \frac{1}{n} \cdot m^2 \underbrace{\sum 1}_n$$

$$= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - 2m^2 + \frac{1}{n} \cdot m^2 \cdot n = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - m^2$$

FORMULE DE KÖNIG

$$\boxed{10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 = k \cdot 11} \quad \text{Hyp. de réc.}$$

$$\boxed{n=0} \quad 10^2 + 10 + 1 = 11 = 1 \cdot 11 \quad \checkmark$$

$$\boxed{n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark}$$

$$10^{6(n+1)+2} + 10^{\overbrace{3(n+1)+1}^{3n+3+1}} + 1 =$$

$$10^{6n+2+6} + 10^{3n+4} + 1 =$$

$$10^{6n+2} \cdot 10^6 + 10^{3n+4} + 1 =$$

$$\left(10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \right) \cdot 10^6 - \left(10^{3n+1} + 1 \right) \cdot 10^6 + 10^{3n+4} + 1 =$$

$$\underbrace{\left(10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \right) \cdot 10^6 - 10^{3n+7} - 10^6 + 10^{3n+4} + 1}_{k \cdot 11} =$$

$$k \cdot 11 + 10^{3n+4} \left(1 + 10^3 \right) - 10^6 + 1 =$$

$$k \cdot M + 10^{3n+4} \cdot 91 \cdot M - 9009 \cdot M =$$

$$M \cdot M$$

QED

1.2.6

m impair et positif si $m = 2k+1$
 $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n (2k+1)$$

1.2.1

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hyp. de réc.

$$n=1 \quad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad \checkmark$$

$$n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1)$$

Hyp. de réc.

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \dots = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

CQFD