# Algèbre linéaire

Application linéaire

$f(x+y) = f(x)+f(y)$

$f(bx) = bf(x)$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto a\cdot x$

$(a_n)$

$x+y \mapsto a(x+y) = ax+ay$

$bx \mapsto a\cdot(b\cdot x) = abx = b\,(ax)$

Espace vectoriel

$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$

$u+v \;/\; k\cdot u \;/\; 0$

vecteur

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = u$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin x$

$u = x^2-3x+2$

$u = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$\mathbb{R}^3 \leftarrow$ Espace des vecteurs du type $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$

$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

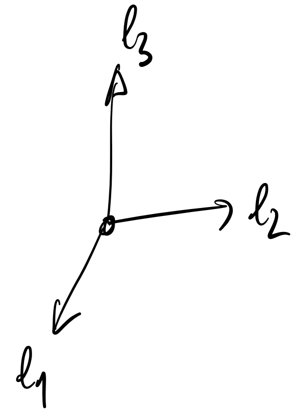
$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$u \longmapsto h(u)$$
$$u \longmapsto A \cdot u$$

$h$ linéaire :

$$h(u+v) = h(u) + h(v)$$
$$h(\lambda u) = \lambda\, h(u)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

relativement à une base de $\mathbb{R}^3$



Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

linéaire d'un espace vers lui-même.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculer $Ax$ pour

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-8 \\ 6-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quels sont les vecteurs pour lesquels $Ax = 0$ ?

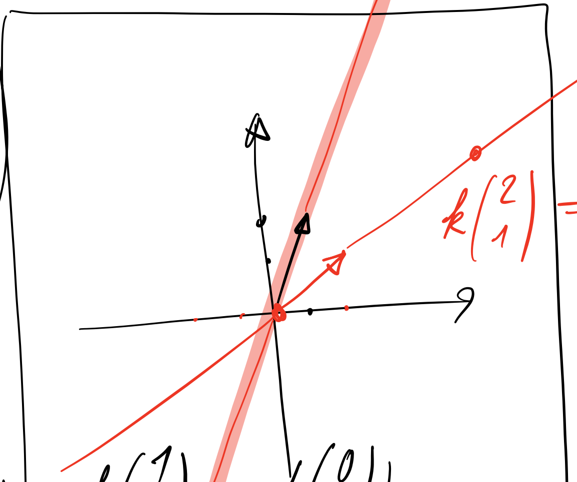
Quels sont les vecteurs $y$ pour lesquels $\exists x$ tq. $Ax = y$ ?

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{a} \mathbb{R}^2$$

a n'est pas surjective car $\operatorname{Im}(A) = k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-2x_2\\2x_1-4x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-2x_2\\2(x_1-2x_2)\end{pmatrix}$$

$$= (x_1-2x_2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$



$$k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix}$$

a n'est pas injective car $\ker(A) = k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \neq \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2k-2k\\4k-4k\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Image de A: $\boxed{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$

Noyau de A: $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = 0\}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_2 = 2k \\ x_2 = k \end{cases} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

base du noyau

<u>Exemple:</u> Image et noyau de l'application $\boxed{\mathbb{R}^3 \xrightarrow{a} \mathbb{R}^3}$

donnée par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Noyau:}}$ ens. des sols de $Ax = 0$ $\qquad \ker(A) = \{0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_3 &= 0 \end{aligned} \implies x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont lin. indép.

$\Rightarrow \operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^3$

<u>Exemple:</u> $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$ donnée par $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

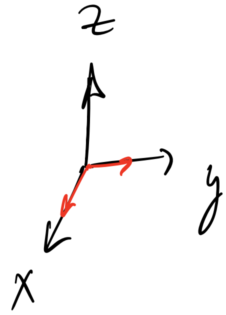
$\boxed{w = u + 2v}$ $\quad u, v, w$ ne sont pas lin. indép.

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]=$$

$$(x_1+x_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(x_2+2x_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=$$

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

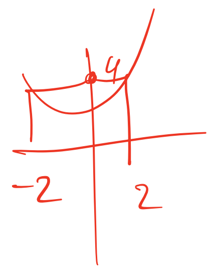



$Im(B)$ : Le plan $z=0$

$a$ est <u>surjective</u> si $\forall y\in\mathbb{R}^3$ $\exists x\in\mathbb{R}^3$ tq. $a(x)=y$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{a} \mathbb{R}^3$$

$a$ est <u>injective</u> si $a(x)=a(y) \Rightarrow x=y$




$f(x)=x^3$ injective $\quad x^3=y^3 \Rightarrow x=y$

$f(x)=x^2$ ~~injective~~ $\quad x^2=y^2 \Rightarrow x=\pm y$

$(-2)^2 \to 4$

$2^2 \to 4$

$a$ est linéaire donnée par sa matrice $A$ :

$\boxed{a \text{ injective} \Leftrightarrow \ker(A)=0}$

$$Ax = Ay \iff Ax - Ay = 0$$

$$\iff A(x-y) = 0$$

$$x - y \in \ker(A)$$

Si $\ker(A) = 0 \Rightarrow x = y$ et $A$ inj.

$\boxed{a \text{ linéaire donnée par sa matrice } A}$

$a$ surjective $\iff Im(A) = \mathbb{R}^3$

Théorème : $a$ linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

bijective : injective et surjective

$a$ bijective $\iff$ $a$ injective $\iff$ $a$ surjective

$$\iff \ker A = 0$$

$$\iff Im A = \mathbb{R}^3$$