$\boxed{\text{Séries alternées}}$

$\sum u_k$ alternée : $u_k = (-1)^{k+1} \cdot v_k$

$$\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots}$$ Converge

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$ Diverge

<u>Critère :</u> $\lim v_k = 0$

$v_{k+1} \leq v_k \quad \forall k$

<u>Exemple :</u> $(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ harmonique alternée

$\lim \frac{1}{k} = 0 \qquad k+1 > k \quad \text{si } k \geq 1$

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \Rightarrow v_{k+1} < v_k$$

$$\sum u_k > \infty$$

$$u_k = \frac{1}{k} \qquad \lim u_k = 0$$

<u>Exemple:</u> $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$ converge

<u>Critère de Leibniz</u>

$$v_k = \frac{1}{k^2} \;/\; v_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}$$

1) $\lim \frac{1}{k^2} = 0$ ✓

2) $(k+1)^2 = k^2 + \overbrace{2k+1}^{>0 \text{ si } k \geq 1} > k^2$

$$v_{k+1} \overset{?}{<} v_k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k^2+2k+1} < \frac{1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow v_{k+1} < v_k \ ✓$$

Le critère de Leibniz s'applique

$$\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$ Converge absolument car $\sum \frac{1}{k!}$ converge

$$e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$$ $r = \infty$ $x \in \mathbb{R}$

$$e^2 = \sum \frac{2^k}{k!}$$

$$e^x = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots}$$

$$e^x \sim 1 + x$$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{1}{2!} x^2$$

$$\boxed{1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3}$$

Polynôme qui approxime e^x

$\boxed{\text{Polynôme}}$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

$\boxed{\text{Série entière}}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Exemple:

$a_k = k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k$$

$x = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k > \infty$$

On peut associer à une série entière la fonction

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

(lorsque cela a un sens: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k < \infty$)

$$U_k = \frac{1}{k} x^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$x = 1 \qquad \sum \frac{1}{k} \cdot 1^k = \sum \frac{1}{k} \to \infty$

$x = 0$ ✓

$x = \frac{1}{2} \qquad U_k = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{k \cdot 2^k}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2 \cdot 2^2} & + & \frac{1}{3 \cdot 2^3} & + & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} \\
& \rotatebox{90}{$\geq$} & & \rotatebox{90}{$>$} & & \rotatebox{90}{$>$} & & \rotatebox{90}{$>$} \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{2^2} & & \frac{1}{2^3} & & \frac{1}{2^4}
\end{array}$$

$\frac{1}{k \cdot 2^k} \leq \frac{1}{2^k}$ si $k \geq 1$

Or $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique qui converge.

$\Rightarrow \sum \frac{1}{k 2^k}$ converge

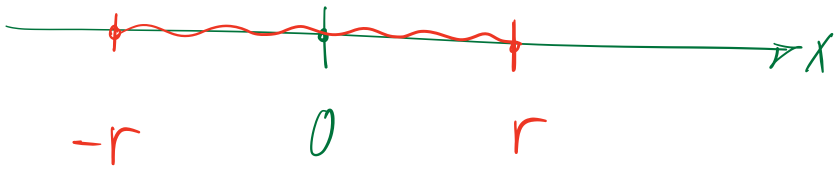
$$\Rightarrow \quad \sum \frac{x^k}{k} \text{ converge pour } x = \frac{1}{2}$$

Critère p. 21 — Rayon de convergence

Converge sur l'inter. $\left]-r\,;\,r\right[$

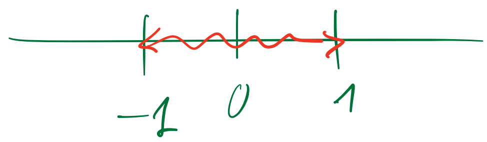
$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = r$$

à tester



$$\sum a_k x^k \qquad a_k = \frac{1}{k} \;/\; a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

Exemple : $\sum \frac{1}{k} x^k$



Critère

$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \left| \frac{1/k}{1/(k+1)} \right| = \lim \frac{k+1}{k} = 1$$

$$\lim \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = \lim \frac{1}{k} \cdot \frac{k+1}{1} = \lim \frac{k+1}{k} = 1$$

Exemple : $\sum \frac{x^k}{k!} = \sum \frac{1}{k!} \cdot x^k$

Critère $a_k = \frac{1}{k!}$ $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$

$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \frac{1/k!}{1/(k+1)!} = \lim \frac{(k+1)!}{k!}$$

$$= \lim (k+1) = +\infty$$

$\Rightarrow$ $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

Pour lundi 13 janvier :

- Exemples 3 et 4 p. 22
- 19 abc

$\sum a_k x^k$

$\sum 2^k \cdot x^k$ $\Rightarrow$ $a_k = 2^k$