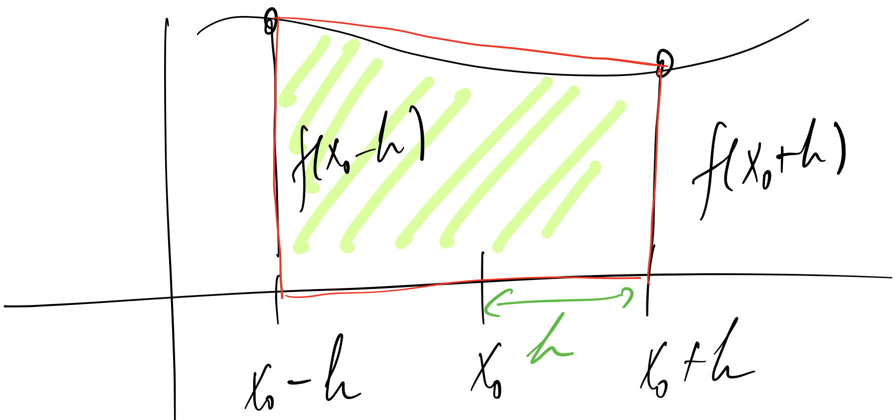
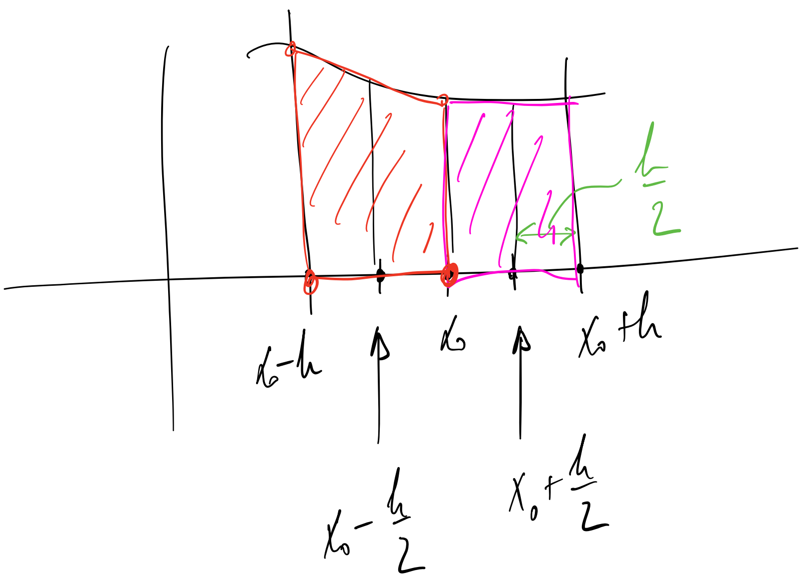


Aire trapeze

$$S_1 = \boxed{\left(f(x_0-h) + f(x_0+h)\right) \cdot h}$$



$$S_2 = \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0-h) + f(x_0)\right)$$
$$+ \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_0+h)\right)$$

$$\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}$$

$$S_2 = \frac{\boxed{h \cdot \left(f(x_0-h) + f(x_0+h)\right)}}{2} + 2\,\frac{h}{2}\,f(x_0)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 + h\,f(x_0)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$ Série géométrique $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\underbrace{(1+x+x^2+\dots+x^n)}_{S_n}(1-x) = 1-x^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$x^{n+1} \to \infty$

$x^{n+1} \to 1$ si $x=1$

$x^{n+1} \to 0$ si $x<1$

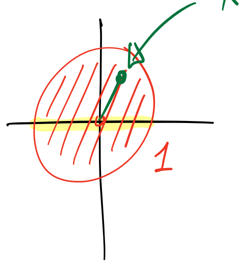
$\boxed{\text{Si } x<1}$

$$\lim S_n = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$\Rightarrow$ si $0<x<1$, alors $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

(vrai si $x \in]-1;1[$)

$x \in \mathbb{C}$



$\boxed{\text{Série de Riemann :}}$ p.7 CRM

$$U_k = \frac{1}{k^\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\alpha = 1}$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ Série harmonique

$\boxed{\alpha = \frac{4}{3}}$ $1 + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} + \dots$

$$\begin{array}{ccccc} w_n & < & S_n & < & v_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C & & C & & C \end{array}$$

$\boxed{EX\ 11}$ Propriétés des pages 4 à 9
et critères

a) $U_k = (-1)^k$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{ DIVERGE}}$$

1 0 1 0 alterne

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$$

0 0 0 0 $\longrightarrow$ 0

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 + (-1) = 0$

$S_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$

$S_3 = 0$

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n \text{ n'existe pas}}$

$\sum_{k=8}^{\infty} (0{,}5)^k$ converge car $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (0{,}5)^k}_{\text{géométrique}}$

$$\underset{k=0}{\frac{1}{3^2}} + \underset{k=1}{\frac{1}{(3+1)^2}} + \underset{k=2}{\frac{1}{(3+2)^2}} + \frac{1}{(3+3)^2} + \frac{1}{(3+4)^2} + \ldots$$

$$\boxed{U_k = \frac{1}{(3+k)^2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$S_n = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(3+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(3+n)^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3+k)^2}$$

POUR QUE

$$\lim S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3+k)^2} \quad \text{existe} \quad (\text{qcq})$$

IL FAUT QUE

$$\lim_{k\to\infty} U_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(3+k)^2} = 0$$

$$\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\frac{2}{5} = 0{,}4 < 1$$

$$\boxed{0 < u_k = \frac{1}{k}\cdot v_k \leq v_k = \left(\frac{2}{5}\right)^k}$$

$u_k \leq v_k \quad \forall k$

$$u_k = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Quel est le terme général (v_k) de la série géométrique pour laquelle $x = \frac{2}{5}$? $u_k = \left(\frac{2}{5}\right)^k$

$x = \frac{2}{5}$

Comparer les débuts de

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^0 + \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \dots \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{5}}$$

$5/3$

$$\begin{array}{ccccccccc} \left(\frac{2}{5}\right)^1 & + & \left(\frac{2}{5}\right)^2 & + & \left(\frac{2}{5}\right)^3 & + & \left(\frac{2}{5}\right)^4 & + & \dots \\ \geq & & \geq & & \geq & & \geq & & \\ \left(\frac{2}{5}\right)^1 & + & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 & + & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3 & + & \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4 & + & \dots \to C \end{array}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ si } |x|<1}$$

$\Rightarrow u_k \leq v_k \quad \forall k \geq 1$

$\Rightarrow$ si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ existe, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ aussi.

$$x = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{5}{5}-\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{3}$$

Vu que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$,

la série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)$ diverge.

$\boxed{\text{Propriété 3 p. 5}}$

$\boxed{11 \quad d)}$

$$u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt[k+1]{10}} \qquad k \geqslant 1$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot 10^{-\frac{1}{k+1}}$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{10^{\frac{1}{k+1}}}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{10^{\frac{1}{k+1}}} = « \frac{1}{10^0} »$$

$$= 1$$

$u_k \longrightarrow -1$ si k est pair

$u_k \longrightarrow 1$ si k est impair

$\Rightarrow$ $\lim u_k$ n'existe pas.

$\Rightarrow$ La série diverge

PROPRIÉTÉ 3 p. 5